

Si totusi despre al cincilea postulat

PhD Adrian Mihalcea, membru GCI, membru CRIFST

Cadrul celor ce vor urma este asa numita **geometrie neutrala(absoluta)** in care postulatul cinci al lui Euclid nu este statuat si deci in care se pot duce prin orice punct din plan un numar indefinit de drepte paralele la orice dreapta din plan exteriora punctului daca altceva decat postulatul nu impiedeca asta. In acest cadru sunt valabile toate teoremele din Elemente cuprinse pana la teorema I-29 prima in care se invoca postulatul 5 cat si toate cele care urmand nu folosesc direct sau indirect postulatul (III.16, X.1etc) , fiind de fapt vorba despre geometria fara postulat intelegand insa ca daca va exista si teorema care inlocuiste postulatul cum ar fi unicitatea paralelei pe care incerc sa dau eu sau suma unghiurilor egala cu π (Legendre)sau altele cunscute ca inlocuindu-l atunci geometria euclidiană va fi in toate drepturile sale adica cu suma unghiurilor in triunghi de π sau cu teorema lui Pitagora adevarata, fara a se mai apela la al cincilea postulat care va ramane ca o teorema, situatie despre care Farkas Bolyai spunea ca cel care ar reusi-o ar merita „un diamant cat pamntul de mare”.

Asadar aici ma voi referi partial si la tot ce din punctul meu de vedere epuizeaza aceasa tema si anume contributiile celor din antichitate, evul mediu si epoca moderna, terminand cu Legendre(1823) si cele incepute si incercate de mine cu mult timp in urma si finalizate incepnd de acum cativa ani (2018) pentru a merge pe urmele si in apararea lui Legendre. cu finalizare, sper eu ca deplina, in aceasta perioada de razboi european si boala pentru mine.

Dar totodata voi prezenta si cateva elemente geometrice de baza de care am tinut cont, ele fiind desigur referite anterior (Euclid and so on) iar daca este o propunere personala voi mentiona acest aspect.

In final consider ca daca am dovedit dreptatea lui Legendre aceasta cum se va vedea la final este triumful principiului identitatii .

a)Bibliografie euclidiană si de geometrie neutrala(fara postulat)

<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/bookI.html>
<http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Euc.+1&redirect=true>
<http://www.trigofacile.com/maths/euclide/index.htm>
dar si Legendre(sec 19) si Marvin Greensberg(sec 21)

Un manual de geometrie neutrala foarte interesant este:

<https://www.math.ust.hk/~mabfchen/Math4221/Neutral%20Geometry.pdf> , care cred ca are introduse si contributiile ale unui matematician american si ma refer la Marvin Jay Greenberg(1936-2017) pentruca in manual exista si demonstratia foarte eleganta a axiomei lui Aristotel data de Marvin Lee Greensberg si in <http://math.ucr.edu/~res/math133/neutral-Aristotle.pdf>

Din manualul de geometrie neutrala retinem : Daca un triunghi are suma unghiurilor π toate celelalte au aceiasi suma (Theorem 4.2 (Once-Then-All Theorem)), care este o demonstratie in trei pasi si anume : Daca exista un triunghi cu suma unghiurilor de π atunci exista un dreptunghi(1) si

daca exista un dreptunghi atunci fiecare triunghi dreptunghic are suma unghiurilor $\pi(2)$ si daca este asa atunci si toate triunghiurile au suma unghiurilor $\pi(3)$ precum si notiunea de unghi „defect” al unui triunghi care in consecinta teoremei Legendre poate adunat la suma unghiurilor unui triunghi sa o completeze pe aceasta pana la valoarea π .

b) Cateva extrase din literatura si cateva contributii personale in zona definitiilor si unor proprietati fundamentale:

Cred ca este bine sa subliniem un adevar geometric evident si anume ca asa cum exista o infinitate de linii circulare diferite obtinute cu o infinitate de raze de diferite marimi, nu exista decat o singura **regula constitutiva** pentru dreapta, asa cum nu exista decat un singur punct, dar in timp ce pentru punct definitia euclidiană este suficientă, pentru dreapta consider alături de mulți alții ca cele ce sunt date în Elemente raman destul de confuze si asa cum s-au mai propus diverse definitii definesc si eu „rectitudinea” adica proprietatea pe care o au punctele care sunt pe o linie dreapta pentru a fi astfel asa cum circularitatea este proprietatea punctelor ce se afla pe o linie circulara adiacă conform **regulei constitutive** a cecului sa fie la distanță egală de un **unic punct numit centru**.

Asadar: **Linia dreapta** este linia care este distanță cea mai scurtă între două puncte (Arhimede dar confirmată ca fiind adevărată pentru o dreapta euclidiană si cf. Elemente I.20 si I.21 unde suma a două laturi este mai mare decât cea de a treia si în cazul a două triunghiuri cu o latură comună suma laturilor aflate în interiorul celorlalte este mai mică) si se continuă de o parte si de alta nelimitat, orice porțiune a ei confundându-se cu orice porțiune a ei, motiv pentru care toate liniile drepte ce se pot duce în plan prin deplasări convenabile se confundă între ele adică putându-se suprapune toate una peste cealaltă si putem spune ca dacă există o infinitate de cercuri diferite adică ce nu se pot confunda există o singură dreaptă (definiție care precizează postulatele euclidiene) așa cum există un singur punct din punct de vedere al regulilor constitutive euclidiene. Dar odată construit un segment de dreaptă acesta poate da naștere unei drepte ce se întinde de la infinit la infinit dar suprapunându-se pe segment si având direcție constantă pe toată desfășurarea ei rectilinie.

O definiție a lui Legendre: \ linia care nu poate avea decât o singură poziție între două puncte date. După mine asigură unicitatea dreptei.

Faptul ca este drumul cel mai scurt se demonstrează deci este o teoremă

În orice triunghi, o dreaptă ce trece printr-un vârf nu poate ieși din triunghi decât intersectând latura opusă vârfului conform definiției dreptei (adică naturii liniei drepte) deci nu există o dreaptă care să plece dintr-un vârf si să nu intersecteze latura opusă.

Două drepte pot fi fie paralele adică neîntâlnindu-se niciodată, neavând nici-un punct comun, neputând forma niciun vortex, fie pot avea un singur punct comun adică formând un vortex si în vortex se aplică teorema Aristotel (Greenberg) sau Proclus (în exprimarea sa) în care laturile vortexului pot ajunge la orice distanță si cu lungimi ilimitate, acestea variind de la zero în vortex, la infinit, când punctul se depelasează la infinit pe laturi si distanță dintre laturi putând fi oricât de mare.

Axioma lui Aristotel (vezi lema 7 din Geometria neutră la

<https://www.math.hkust.edu.hk/~mabfchen/Math4221/Neutral%20Geometry.pdf> si

<http://math.ucr.edu/~res/math133/neutral-Aristotle.pdf>, unde se demonstrează (Greenberg) ca într-un unghi XOY cu vertexul în O ducând o perpendiculară YX de la un punct Y de pe o latură, să zicem de pe OY, acest segment fiind distanță din punctul Y de pe latura OY a unghiului până la cealaltă latură OX, oricât de mare ar fi un număr real si oricât de mică plecând din vecinătatea lui zero ar fi perpendiculară din Y pe OX respectiv dusă de pe punctele laturii OY la latura OX aceasta poate ajunge oricât de mare asta însemnând ca pe măsura ce crește distanță dintre cele două puncte Y si X de pe OY si OX la vortexul O, crește si distanță dintre drepte ajungând oricât mare si desigur ca în sens invers scade ajungând oricât de mică, în vertex fiind zero si dreptele ca si unghiul la limită disparând.

Credem ca așa a gândit Proclus această axioma de continuitate si astfel folosită în cazul patrulaterului Sacchieri unde în baza ei putem arăta paralelismul laturilor orizontale, cele verticale fiind paralele prin construcție.

Intradevar putem arata folosind axioma lui Aristotel(Greensberg)ca dreapta CD din patrulaterul lui Saccheri, ABCD(AC=BD si paralele fiind perpendiculare in A si B pe AB) este paralela cu AB(Greensberg plus reducere la absurd a liniei care avand suma unghiurilor adiacente de pe o parte diferita de π nu poate fi linie dreapta subintinzand un unghi) si daca continui constructia cu alt patrulater(BDEF) lipit de primul prin BD comuna atunci si dreapta DE este si ea paralela cu AB($A \cdot B \cdot F$, trei puncte coliniare)dar nu stim daca este si in prelungirea lui CD si daca unghiurile C, D sunt de $\pi/2$.

1. Demonstratie personala:

Fie un punct geometric care lasat liber se roteste in jurul unui **punct O** si parcurge circumferinta corespunzatoare unui sfert de cerc cu un unghi la centru crescator de la 0 si $\pi/2$ Unghiul este zero cand raza vectorie este suprapusa peste OA si $\pi/2$ cand este suprapusa peste d_1 trecand continuu prin toate punctele de pe arcul sfertului de cerc intre punctele A si intersectia cercului cu d_1

Daca din O ducem o dreapta OA inspre sud si pe aceasta din punctul A ducem o perpendiculara „**d**”pe OA si in punctul O o alta perpendiculara „**d1**” tot pe OA in baza teoremei neutrale I.27 din primul volum din Elemente. **d** si **d1** sunt paralele.

Problema pe care trebuie sa o rezolvam este daca in O in afara de dreapta **d1** se mai poate duce si o alta paralela la **d**

Vom face urmatoarea constructie si aume construim triunghiul isoscel OAA1 in care AA1 de pe dreapta **d** este egal cu OA si deci unghiul AA1O este egal cu unghiul AOA1

In continuare construim triunghiurile isoscel care se formeaza luand pe dreapta **d** urmatoarele segmente egale unul in continuarea celuilalt adica $A_1A_2=A_1O$, ... $A_{i-1}A_i=A_{i-1}O$... $A_{n-1}A_n=A_{n-1}O$...cu urmatoarele relatii intre unghiuri :

$$AA_1O=A_1OA; A_1A_2O=A_2OA_1; \dots A_iA_{i+1}O = A_{i+1}OA_i; \dots A_nA_{n+1}O=A_{n+1}OA_n$$

De unde si in baza valorii unghiului exterior cat si in baza teoremei Saccheri-Legendre avem:

$$A_1A_2O \leq AA_1O/2 \leq \pi/2^3; A_2A_3O \leq A_1A_2O/2 \leq AA_1O/\pi 2^4; \dots$$

$$A_iA_{i+1}O < A_{i-1}A_iO/2 \dots \leq \pi/2^{(i+2)}; \dots A_{n-1}A_nO < A_{n-2}A_{n-1}O/2 \dots \leq \pi/2^{(n+2)}$$

Constatam ca pe masura ce constructia se duce spre infinit unghiul pe care-l face oblica OA_n cu **d** scade oricat de mult adica oicare ar fi un unghi mic ϵ cu care l-am comparat initial conform Elementele X.1 valoarea unghiului scade sub acest ϵ dar din conditiile constructiei raza vectorie cu care se misca OA_n care insa nu este restrictionata si poate ajunge la d_1 , unghiul la centru al sfertului de cerc devenind $\pi/2$

Daca raza vectorie nu se poate prin constructie desprinde de OA_n va avea si ea aceleasi restrictii ca si aceasta dreapta.

Daca insa urmarim cinematica acestei constructii geometrice ne dam seama ca pe masura ce A_n se indeparteaza de A iar A_iO intersecteaza arcul sfertului de cerc intr-un punct F_i care fiindca unghiul razei vectorie creste fata de OA_n pe masura ce acesta tinde spre infinit se apropie cum am spus de dreapta **d1** dar fara sa o atinga cat timp ramane solidar cu OA_n . Adica F nu poate ajunge niciodata pe **d1**. Interesant este ca procesul de extindere al figuri spre est nu se opreste si daca continua in acelasi ritm viteza ca viteza de miscare a lui F pe circumferinta scade permanent acesta neputand ajunge niciodata la **d1**.

Dar oricat de incet si oricat de mic a fi unghiul de avansare al razei vectorie in el toate dreptele AO_n intersecteaza dreapta **d** care inchide permanent triunghiurile formate de razele vectore OA_i in miscarea neintrerupta dar si nesfarsita spre infinit a lui A_n si spre **d1** a razei vectorie si acest lucru nu permite aparitia unor drepte care sa plece din O si sa nu ajunga la **d**, adica dreptele ramnnd sa iasa spre infinit in intervalul dintre **d** si **d1** marcat prin distanta O.A. Geometria euclidiană poate folosi postulatul ca teorema fara problem si intelegand ca spatiile neeuclidiene sunt restrictii spatiale ce deriva din cel euclidian.

O demonstratie similara poate ca se poate face daca se foloseste semicercul obtinut cu centrul in A si raza OA cu utilizarea teoremei neutrale III.16, dar si aplicand rationamente de tipul teoremei lui Aristotel sau principiului lui Proclus care considera ca un unghi poate fi gandit ca un domeniu infinit in directia in care se pot prelungi laturile si putand sa inglobeze si unghiul AOd_1 cu dreapta **d**

2. Demonstratia publicata de Legendre in 1823

Este o demonstratie publicata de Legendre in tratatul sau de Geometrie -Elements de geometrie, publicat in multe(12) editii de mare succes intre 1794-1823 si pe care eu o consider corecta si nu inteleg de ce Legendre nu a sustinut-o mai determinat!?. Poate ca ne va lamuri un geometru, profesor universitar din USA, respectiv Anna Riffe cu lucrarea ei din 2013, „The Impossible Postulat: An analysis of Adrien-Marie Legendre's Attempt to Prove Euclid's Fifth Postulate” , <https://mospace.umsystem.edu/xmlui/bitstream/handle/10355/44925/RiffeImpPro.pdf?sequence=1&isAllowed=yin>

, care citeza si pe criticul acestuia respectiv pe J.W.P.Stein care il combate in „Geometrie elementaire. Examen de quelques tentatives de theorie des paralleles, Annales de Mathematique Pures et Appliques, vol.15, 1824-1825.

Rezum in continuare finalul demonstratiei lui Legendre prezentat si de Anna Riffe(pg39-pg.45):

Fie un triunghi scalen ABC in care AB este latura cea mai mare si BC cea mai mica fara sa fie insa nici-o problema daca se ia si cazul $AC=BC$ sau $AC=AB$. Se cere sa se demonstreze ca suma unghiurilor in acest triunghi este constanta si egala cu π .

Se utilizeaza urmatoarea constructie auxiliara :

Se uneste varful A cu I, jumatatea laturii celei mai mici BC si AI se prelungeste pana in punctul C1 astfel ca $AC1=AB$;

Se prelungeste latura AB dincolo de B pana in punctul B1 astfel ca $AB1=2AI$ si pe AB se ia punctul K astfel ca $AK=AI$;

Se unesc punctele C1 cu B1 si cu K formandu-se astfel triunghiurile egale C1AK si AIB avand unghiul A comun si laturile adiacente acestuia doua cate doua egale;

Se observa ca si triunghiurile ACI, B1C1K sunt egale si deci unghiul $ACB=\text{unghiul } KC1B1$ cat si unghiul $CAI=C1B1K$ din care rezulta ca suma unghiurilor triunghiului ABC este egala cu suma unghiurilor triunghiului A1(A) B1C`1 sa-i spunem k urmand sa aratam ca valoarea sumei este egala cu π

In aceasta situatie observam ca datorita relatiilor geometrice deduse in constructia sa unghiul din B1 este egal cu diferenta dintre unghiul din A si unghiul din A1(unghiul IAB) A1fiind acelasi varf cu A, adica suma celor doua unghiuri este $A1+B1=A$ si cum si latura $B1C1<AC1$ rezulta ca si unghiul $IAB<B1$. In aceasta situatie se vede usor ca unghiul $IAB<IAC$ adica mai mic decat unghiul $A/2$ si daca continuam indefinit adica la infinit constructia seriei de triunghiuri vom ajunge la un triunghi $AnBnCn$, in care suma celor trei unghiuri va fi la fel ca in triunghiul propus ABC si care va avea unghiul An mai mic decât orice termen dat al progresiei geometrice descrescătoare cu rata $1/2$ care este $A, 1/2 A, 1/4 A, 1/8 A...1/2^n...$

Prin urmare, putem presupune că această serie de triunghiuri continua până la unghiul An care e mai mic decât orice unghi dat si putem atunci vedea că suma celor trei unghiuri ale triunghiului $An Bn Cn$ care cand n tinde la infinit se poate denumi triunghiul final, se reduce la un singur unghi $AnCnB$ când $BnAnCn$ este „mai mic decât orice unghi dat”

Atunci putem considera ca daca suma celor trei unghiuri este aceiasi si sa spunem egala cu $k(k\leq\pi)$, la limita avand An, Bn si $An+Bn=0$ cand $n=\text{infinit}$ si deci $\lim(An+Bn+Cn)=\lim Cn$ iar $\lim Cn$ cand An si Bn tind la zero tinde la π caci linia $BnAn$ tinde sa se sprapuna pe $BnCn$.

Deci $k=\pi$

Se mai poate observa ca geometric cand unghiurile An si Bn tind la zero si dreptele $CnAn$ si $CnBn$ care le formeaza se astern peste dreapta $AnBm$.

Deci odata in plus **unghi $Cn=\pi=k$**

Nota importanta: Faptul ca geometric cu cat se continua procesul doua din laturile triunghiului tind sa se astearna peste cealalta adica sa ajunga una in prelungirea celeilalte si deci unghiul obtuz $AnCnBn$ tinde sa devina π , unghiurile celelalte ascutite sa devina zero simultan aceleiasi suprapuneri pentru procesul dus la infinit ne duce la concluzia ca suma este tocmai π pentruca nu ar putea sa fie o suma permanent constanta si care sa fie la limita π , dar sa aiba pana la limita o alta valoare intr 0 si π contrazicand oarecum principiul identitatii .

Daltfel demonstratia este valabila pentru orice triunghi si deci ori toate au o suma constanta ori fiecare triunghi are propria lui suma pe care totusi prin constructie o transmite unei intregi familii cu un numar infint de triunghiuri obtiute prin constructia indicata si care condce la o valoare $k_i = \pi$ pe care o iau toate familiile triunghiului initial „i”. Astfel se ajunge fie la o singura valoare pntru suma k_i fie la o infinitate de posibilitati de valori diferite motivate prin nimic ca si cum suma ar depinde de marimea relativa dar si absoluta atat a laturilor cat si a unghiurilor. Apare astfel o banuita posibila dependenta intre valoare si o anume modalitate de constructie de parca acest mod de constructie folosit de Legendre are proprietatea de a crea triunghiuri cu suma unghiurilor egala. Daca s-ar face toate combinatiile laturi -unghiuri, laturile putand sa mature intreaga infinitate a spatiului si unghiurile mai modeste dar tot atat de numeroase si aflandu-se intr-un interval $(0, \pi)$ ar trebui sa rezulet o infinitate de sume aflate intr-un interval similar cu cel al unghiurilor dar avand intervalul deschis -inchis $(0, \pi]$ conform teoriei Lagrange -Saccheri fiind intreatesute cu serii infinite cu valori constante in respectivul interval care ar trebui sa fie diferite sau egale parca dupa un anume bun plac. Cred ca logic aceasta este o aberatie si valoarea lui k trebuie sa fie unica si egala doar cu π spre care o conduce infinitatea de siruri de constructii legendriene care pot fi facute. Credem ca principiul lui Occam se aplica si aici. Suplimentar in apararea demonstratiei lui A.M. Legendre ilcontrazicem pe J.W.P.Stein cel care a crezut ca demonstreaza eroarea lui Legendre considrand ca Legendre s-a inselat bazandu-se p o simultaneitate intre atingerea limitei zero pentru unghiul $C_n A_n B_n$ si distanta de la C_n la deapta $A_n B_n$ intrucat la limita linia franta $A_n C_n B_n$ dispare suprapunandu-se peste $A_n B_n$. Este insa evident ca daca acceptam ca vine un moment cand $A_n C_n$ se suprapune peste $A_n B_n$ numai si numai fiindca unghiul $C_n A_n B_n$ este zero, in acel moment si punctul C_n se afla pe linia $A_n B_n$ si deci si latura $C_n B_n$ este obligata sa se astearna si ea peste $A_n B_n$ conform naturii liniei drepte si demonstratia lui Legendre se sustin si pote ca se poate spune QED?

Este pacat pentruca Legendre spre sfarsitul vietii avand niste probleme personale dificile nu a mai avut dorinta sa-si apere relizarea lasndu-ne totusi in 1823 putin timp inainte de moarte o fraza referitoare la realizarea sa matematica si posteritatii grija sa o confirme, ceea ce eu am incercat sa fac.

Fraza lasata noua de Legendre este: **„Cu toate acestea este neindoielnic ca teorema referitoare la suma celor trei unghiuri in triunghi ar trebui considerata un adevar fundamental pe care este imposibil sa-l contesti si care este un trainic exemplu de certitudine matematica”.**

Legendre considera evident ca daca un unghi tinde la zero laturile sale tind sa se sprapuna si ca in timpul procesului simultan cand nu mai exisa doua unghiuri nu mai exista nici doua laturi. Nu cred ca asa ceva trebuie demonstrat tinand de esenta dreptei si a unghiului asa cum sunt ele definite in geometria euclidiană.