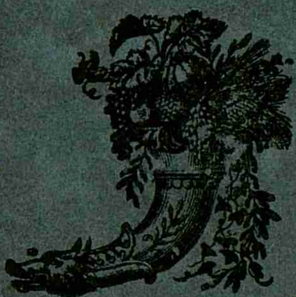
ЕЛЕМЕNTE

DE

АЛЏЕБРЪ

дȣпе

APPELTAUER.



БȣКȣРЕЩІ.

Ꙟn Tіпографіа Колеџіȣлȣі Sf. Sava.

1842.

ЕЛЕМЕNТЕ

DE

АЛЏЕБРЪ

dȣпе

APPELTAUER.

Традȣсъ din латinеще кȣ оаре каре modifiкацiї

de

П. ПОЕNАРȢ.

Dіректорȣл Шкоалелор Naцiонале.

БȢКȢРЕЩЇ.

Ꙟn Tiпографia Колеџїȣлȣї Sf. Saва.

1841.

Ꙟndpeптapea Гpeшeлiлop.

Фаца.	pꙟndѹл.	кѹм este.	кѹм тpeбѹe съ fie
3	18	$A > A - C$	$A > B - C$
4	2	aѹ ачeлea de-спpe aчestea	aѹ aчestea desпpe aчea
4	17	ꙟnsemnea зъ	ꙟnsemneaзъ
6	20	џenapaлъ	џeneраλъ
8	6	кop	вop
8	22	§. 34	§. 33
9	30	de sкъzѹtѹл	desкъzѹt
11	4	$(-2c + 3d)$	$(-2c + 3d)$,
13	11	$a\ d\ b\ c$	$a\ d\ c\ b$
13	20	Dакъ opĭ кape	Dакъ fie кape
13	27	Фiind....	§ 50. Фiind....
13	32	desпpъ	desпpe
13	33	sae	saѹ
15	4	$= P$,	$= P$
15	5	Dѹпъ	dѹпъ
15	10	din eлe	din eлe,
15	20	Ck шi	Ck, шi
16	10	de u	de n
17	5	шapaтъ	шi apaтъ
17	8	$(a + b) m$	$(a + b)^m$
17	15	sѹam	sѹma
18	9	$(a + b)^{n+1}$	$(a + b)^{n+1}$
18	16	$\pm a \times \pm b =$	$\pm a \times + b =$
18	30	doвedi, шi	doвedi шi
18	33	пpodѹкт	пpodѹкт este
19	32	$(7a^m \times ca - b)^n$	$- 7a^m \times (a - b)^n$

*

Фаца,	рѫndȣл,	кȣm este,	кȣm требȣе съ fie
21	1	а чestор	ачestор
22	25	$30a^3 x$	$30a^3 x^3$
24	30	$a^3 : a^2 = a^3—^2$	$a^3 : a^2 = a^{3-2}$
25	12	$5a^s b^n e^p d$	$5a^s b^n c^p d$
25	15	ѫmmȣлцitорȣл	ѫmпърцitорȣл
26	4	$-27a3^m b^{4n} c^p$	$-27a^{3m} b^{4n} c^p$
27	23	$8u^{3-1}$	$8u^3-1$
28	1	$(x^2-3ax-2a2$	$(x^2-3ax-2a^2)$
28	9	$-5a^4x$	$-5a^4x+6a^5$
30	17	(x^2+a^3)	(x^3+a^3)
32	30	ȣрmаре пеmър-цinit	ȣрmаре пri ел ѫnsȣшi пеmърцinit
34	2	se fак, ѫn ло-кȣл лȣi n se поt пȣne пȣ-mеріле natȣ-рале adікъ 2,	se fак, adікъ пȣ-indȣse ѫn локȣл лȣi n пȣmеріле natȣрале ва e-шi 2,
34	9	$2n-1$	$2n\pm1$
36	4	$10+c$	$10+c$
37	2	ѫu	ѫn
38	5	шi fie *a* пȣmъ-рȣл ѫntiitор simплȣ	шi fie *a* чел dѫntѫi пȣmър simплȣ
39	29	ва fi $N:m>N$	ва fi $N:m<N$
39	31	ȣnde	ȣnde
40	5	шi sъ казъ	шi казъ
41	10	IV. $5a^8$	IV. $5a^3$
41	14	челії лалte	еї
42	10	$N: abcf=de$	$N: abce=df$
42	16	комȣnї	компȣшї
42	17	кfарtenї	кȣаtерnї

Фаца,	р꙼ndȣл,	кȣm este,	кȣm требȣе съ fie
42	19	komȣnї	komпȣшї
42	31	de алътȣрї	de сȣбt ел
42	32	dреапрta	dреапta
42	32	fъкъto	fъкъtор
43	20	$3a,\ 2a^2,$	$3a,\ 3a^2$
45	13	, $1ab \ldots\ldots 2bd$	$2ab \ldots\ldots 2bd,\ 2abd$
45	29	§. 25	§. 125
45	33	dosedi	doвedi
46	22	ꙟmпърцi	ꙟmпърцiре
46	32	$B = bc$	$B = bC$
47	20	$B = bc + D$	$B = bC + D$
49	3	389|546 2	389|546|1
49	28	шi K	шi k
49	29	A шi C	H шi C
50	25	$(7x5b)$	$(7x - 5b)$
52	20	$2^3 . 3;$	$2^3 . 3,$
53	11	че se ꙟmпърцi	че se поate ꙟmпърцi
53	23	че нȣ se aтꙟрнъ	че нȣ aтꙟрнъ
54	7	300	360
54	31	De se ва sokoti къ	de ce ва чере чел
56	6	ꙟшпрцiтъ	ꙟmпърцiтъ
57	11	$\frac{3}{9} \times 5$	$\frac{3}{5} \times 5$
58	12	Фрꙟнцерї е—adевърate	Фрꙟнцерї neadeвърate
59	10	$\frac{b}{x+b}$	$\frac{b^3}{x+b}$
61	17	нȣmъръtрȣл	нȣmъръtорȣл
62	14	$\frac{69}{210} = \frac{6}{10} = \frac{3}{7};$	$\frac{60}{210} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7};$

Фаца,	рѫндꙋл,	кꙋм este,	кꙋм трєбꙋє сѫ fie
62	22	$14(a^2-x^2):$ $21(a-x)^2=$	$14a(a^2-x^2):$ $21(a-x)^2x$
63	7	$\frac{3}{7}=\frac{20}{28}$	$\frac{5}{7}=\frac{20}{28}$
64	12	нꙋмърътор	нꙋmitop
64	15	$\frac{8}{42},$	$\frac{8}{42};$
64	19	$,\ \frac{b(a+b}{(a+b)^2(a+b}$	$,\ \frac{b(a+b)}{(a+b)^2(a-b)}$
65	3	нꙋмърътopĭ	нꙋmitopĭ
65	4	нꙋmitopĭ	нꙋмърътopĭ
65	17	оаре каре	оаре-каре
66	7	$=\frac{2}{(1-x)^2}$	$=\frac{2}{1-x^2}$
66	16	$=\frac{1}{21};$	$=\frac{-1}{21};$
66	18	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$	$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}\ \frac{e}{f}\right)$
67	14	155 . 153	155 . 156
68	4	m n	$\frac{m}{n}$
68	21	ꙋнꙋia	ꙋnia
68	22	ꙋнꙋia	ꙋnia
69	7	нꙋмърътopĭ ші нꙋmitopĭ	нꙋмърътор ші нꙋ-mitop
71	7	$\frac{2a^2x^2}{5}$	$-\frac{2a^2x^2}{5}$
71	8	$\frac{a}{3}-\frac{5a^3x}{72}$	$\frac{a^4}{3}-\frac{5a^3x}{72}$

Фаца,	рꙟndȣл,	кȣm este,	кȣm требȣе съ fie
72	15	$=\frac{af}{b(cf+d)}$	$=\frac{af}{b(cf\pm d)}$
72	16	II. $\left(a+\frac{b}{c}\right)$:	II. $\left(a\pm\frac{b}{c}\right)$:
72	17	III. $\frac{4(a^2\,4x^2)x^m}{21\,(a+x)}$:	III. $\frac{4\,(a^2-4x^2)\,x^m}{21\,(a+d)}$:
74	2	se ва ꙟmmȣлці	se ва ꙟпъpці
74	5	$m>nr$,	$ms>nr$.
74	12	$1:\frac{1}{10}=1$;	$1:\frac{1}{10}=10$;
76	5	$\frac{11.45.72}{11.36.49}=$	$\frac{11.45.72}{36.11.49}=$
76	11	§. 1-76	§. 176.
77	6	аша dep	аша dap
78	3	кꙟte ape	кꙟte пȣле ape
78	17	ачеastъ	ачеste
78	18	fpꙟnџepe	fpꙟnџepi
79	1	ши кꙟnd	ши кꙟnd
79	10	$=\frac{26593}{10^3}$	$=\frac{26583}{10^3}$
80	1	пȣmъpъꙇopȣл	пȣmъpъtopȣл
80	14	ачеѣаш se ва feче	ачеѣаш se ва faче
82	11	ши se ꙟmпapte кȣ челе лалte	ши se ꙟmпapte пȣmъpъtopȣл кȣ челе лалte
84	10	ꙟnnainte	ꙟnainte
85	21	$\frac{18}{25000}$	$\frac{13}{25000}$
87	21	ачesta	ачела
89	23	пpoȣкtȣл	пpodȣкtȣл

Фаца,	рꙟndȣл,	кȣm este,	кȣm требȣе сь fie
90	14	$\overline{9,9495}$	$\overline{9,9405}$
90	16	че требȣе se tae	че требȣе сь se tae
90	24	08602	086002
91	26	нȣмърȣл no-телор	нȣмърȣл цifрелор
92	22	$=Q.10^{m+n}$;	$=Q.10^{n-m}$;
93	20	maĭ мȣлt	maĭ нȣцine
93	21	Dакъ ꙟnsъ	§. 198. Dакъ ꙟnsъ
95	4	adъо-ꙟndȣse	adъогꙟndȣse
95	20	fрꙟнцерѣа ко-мȣнъ se поate гъsi	se поate гъsi fрꙟн-церѣа комȣнъ
95	23	ачещia, ва da	ачещia кȣ 10^n, ва da
96	10	$x=\frac{12}{99}=\frac{4}{32}$	$x=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$
96	21	dinрачеѣаш	dintр'ачеѣаш
97	21	кꙟnd i se	кꙟnd ла i se
99	10	$=a^r$,	a^{-r},
99	15	$\frac{1}{a^r}$,	$\frac{1}{a^r}$
99	16	maĭ nainte	maĭ nainte,
99	24	$=\frac{1}{a^r}$;	$=\frac{1}{a^{-r}}$;
100	4	$=\frac{b}{a\pm^{m}.c}$	$=\frac{b}{a\mp^{m}.c}$
101	5	$=a-^{mn}$	$a^{\pm mn}$
101	7	$=a\pm^{mn}$	$a^{\mp mn}$
101	10	ръdъчinĭ	пȣteriĭ
101	13	saȣ̆ zis	s'aȣ̆ zis
101	26	*abcd*...	*abcd*...,

Фаца,	рѫndȣл,	кȣm este,	кȣm требȣе съ fie
101	26	поate ѫнкре-dinца,	поate ѫнкредinца
102	11	§. 216	§. 213
102	13	$b^{\pm n}$	$b^{\mp n}$
102	20	$= + a^n$	$= a^{\pm}$
103	9	$= a^{2n+1}$	$= - a^{2n+1}$
104	3	$\left(-\frac{3a^{2m} b^n c^3}{4g^{m-n}}\right)^3$	$\left(-\frac{3a^{2m} b^n c^3}{5g^{m-n}}\right)^3$
104	4	$= \frac{1}{9} a^6 b^4 c^{-24} =$	$= \frac{1}{9} a^6 b^4 c^{-4} =$
104	15	$a^2 - \frac{x^3}{2}$	$a^2 - \frac{x^3}{2},$
104	17	$\left(a^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2$	$\left(a^2 - \frac{x^3}{2}\right)^2$
104	21	ал кърȣна	а кърȣна
105	17	$= - 2\frac{2x}{3};$	$= - \frac{2x}{3};$
107	19	dъ $m - n$	dъ $m - 2$
108	10	ѫн §. 221	ѫн §. 223
109	1	§. 221	§. 223
109	12	ал кърȣеа	ал кърia
109	18	лл паiрȣлеа	ал патрȣлеа
111	10	a doъa $\sqrt[3]{}$	adoъa, $\sqrt[3]{}$
112	15	ва fi mȣtinлȣ	ва fi mȣtinлȣл
113	4	, a^n,	a^n
114	6	$\sqrt[3]{\left(\frac{4a^2}{9b^2}\right)}$	$\sqrt[m]{\left(\frac{4a^2}{9b^2}\right)}$
115	24	кѫt ши пȣterile	кѫt ши аї пȣterілор
116	4	$= ab^3;$	$= \sqrt{ab^3};$
116	6	$\sqrt[6]{a^9} - \sqrt{a^3}.$	$\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3}.$

Фаца,	рȋndȣл,	кȣm este,	кȣm тpeбȣe съ fie
116	7	, $\sqrt{c^5}$	. $\sqrt{c^3}$
117	7	$\sqrt[m]{a^n},\sqrt[m]{b^r}$	$\sqrt[m]{a^n}\times\sqrt[m]{b^r}$
117	23	S. п. $\sqrt{2a}\,.\,\sqrt{3b}=$	S. п. $\sqrt{2a}\,.\,\sqrt[4]{3b}=$
118	4	шi $\sqrt[m]{b}$,	шi $\sqrt[m]{b^r}\times$
118	11	. $\sqrt[m]{e^5}$	. $\sqrt[m]{c^5}$
118	14	tȣtȣpop fъктоpiлоp	tȣtȣpop esponenцiлоp fъктоpiлоp
118	28	$\sqrt{(20733)}$	$\sqrt{(20736)}$
119	12	$s>m$	$s<m$
120	8	пpintp'ачeastъ	пpintp'ачeasta
121	13	$\frac{\sqrt{(2a)}}{\sqrt{(9a)}}=\sqrt{\left(\frac{2a}{9a}\right)}$	$\frac{\sqrt{(2a)}}{\sqrt{(6a)}}=\sqrt{\frac{(2a)}{(6a)}}$
122	12	$=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{a^3}\right)}=$	$=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{a^2}\right)}$
122	13	$\left(\frac{8a}{4a}\right)=\frac{a}{3}\sqrt[3]{2a};$	$\left(\frac{8a^3}{4a}\right)=\frac{a}{3}\sqrt[3]{2a^2};$
123	9	$=\frac{\sqrt{(a^nb^{m-r})}}{b}$	$=\frac{\sqrt[m]{(a^nb^{m-r})}}{b}$
123	12	$=\sqrt[3]{\overset{3}{\left(\frac{18}{27}\right)}}=\frac{\sqrt{18}}{3}$	$=\sqrt[3]{\left(\frac{18}{27}\right)}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$
124	7	$\sqrt[3]{\frac{(700000)}{100}}=$	$\sqrt[3]{\frac{(7000000)}{100}}=$
125	2	opĭ-каpe аpe	opĭ-каpe, аpe
125	24	$(\sqrt{-a})^2=(a)^{\frac{2}{2}}$	$(\sqrt{-a})^2=(-a)^{\frac{2}{2}}$
126	9	$(\sqrt{-1})_3=$	$(\sqrt{-1})^3=$
128	8	$=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{(5-1)}(\sqrt{5}+1)}$	$=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

Фаца,	рɫndȣл,	кȣм este,	кȣм требȣе съ fie
128	11	$\frac{N}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$	$\frac{N}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}$
128	13	$\frac{N}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$	$\frac{N}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}$
128	20	прin semnȣл радiкал	прin esпonentȣл semnȣлȣĭ радiкал
129	1	$=a^{\frac{n}{m}}$	$=a^{-\frac{n}{m}}$
129	3	Dар $a^{\pm\frac{n}{m}}$	Dар шi $a^{\pm\frac{n}{m}}$
129	7	I. $\left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^r$	$=a^{\pm\frac{n}{m}}$
129	8	II. $\left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^r=a^{\pm\frac{nr}{mr}}$	II. $\left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^r=a^{\pm\frac{nr}{m}}$
129	11	$=\frac{\pm ns \mp mr}{a^{ms}}$	$=\frac{\pm ns \pm mr}{a^{ms}}$
131	1	$=\frac{1}{a^{mr}}$	$=\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mr}}}$
131	9	§. 366	§. 266
132	1	че нȣ нȣ atɫрнъ	че нȣ atɫрнъ
133	12	$\sqrt{f^2 a^{2m}+\ldots}$	$\sqrt{(f^2 a^{2m}+\ldots}$
134	12	$12ab-20ac+9b$	$12ab-20ac+9b^2$
134	24	$(A'+B')B'$	$(2A'+B')B'$
135	10	$(2A+B)=$	$(2A+B)B=$
136	5	$\overline{-\quad-}$	$\overline{+\quad-}$
137	3	$-\frac{3ax}{3}$	$-\frac{3a^x}{2}$
137	13	нiчĭ о ръмъшi-цъ. Dакъ	нiчĭ о ръмъшiцъ; dакъ
138	3	$\frac{-}{0\quad x}$	$\frac{-}{0+x}$

Фаца,	рѫndȣл,	кȣm ecte,	кȣm tpeбȣe sъ fie
138	11	$-\frac{x^6}{256c^9}$ шчл.	$-\frac{x^6}{256c^{10}}$
138	5	$A=2c+\frac{x}{c}$	$2A'=2c+\frac{x}{c}$
139	5	ѫnt'paчest	ѫntp'aчest
139	14	$D=\frac{\frac{1}{2}-1}{3}.-$	$D=\frac{\frac{1}{2}-2}{3}.-$
139	14	$\frac{x^2}{8c^3}\cdot\frac{x}{c^2}=\frac{x^3}{16c^5}$	$\frac{x}{c^2}=\frac{x^3}{16c^5}$
139	15	$E=\frac{\frac{1}{2}-1}{4}$	$E=\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$
140	1	$\frac{x^2}{8x^3}$	$\frac{x^2}{8c^3}$
140	11	doъ лitepe	doъ цifpe
140	15	nȣ se afлa	nȣ se ва afлa
141	27	§. 205	§ 203.
141	31	пъtpataл	пъtpatȣл
142	6	de aл doiлea.	de aл doiлea,
142	7	saȣ̆ $2AB=240$,	saȣ̆ $2AB=429$.
142	8	ръmъшiцa 409,	ръmъшiцa 469,
144	1	$A^2=100000$	$A^2=10000$
144	14	sъ se sкaцъ	sъ se sкoaцъ
145	25	dȣпъ §. 267	dȣпъ § 276
146	22	$2B'+B'$	$2A'+B'$
147	18	$2f^2ga^{2m}x^n+$	$3f^2ga^{2m}x^n+$
148	13	$A=\sqrt[3]{f^3c^{3m}}=fa^m$	$A=\sqrt[3]{f^3a^{3m}}=fa^m$
149	23	$B'=gx^2.3=3x^3$	$B'=gx^2.3=3x^2$
149	25	лitepa S sъ se sкazъ	лitepa S, sъ se sкazъ
151	13	ва da osepie	ва da o sepie

Фаца,	рѫndȣл,	кȣm este,	кȣm тpeвȣe sъ fie,
152	19	$\sqrt[3]{(c^3+x)}=$	$\sqrt[3]{(c^3-x)}=$
153	12	$11=10-1$;	$11=10+1$;
153	18	$B^2=1$	$B^3=1$
154	18	$S=\frac{23663}{0}$	$S=\frac{23653}{0}$
154	19	$2A^2B=18900$	$3A^2B=18900$
154	20	$2AB^2=4410$	$3AB^2=4410$
155	18	прецȣл dekadid	прецȣл dekadik
156	8	че тpeвȣe sъ skpie	че тpeвȣe sъ se skpie
159	23	$\sqrt[3]{148035889}=$	$\sqrt[6]{148035889}$
159	31	$+10A^2B^4$	$+10A^2B^3$
160	6	ачestop кaлse	ачestop клase
160	24	тpeȣȣe sъ se aшeze	тpeвȣe sъ se aшeze
161	1	$\sqrt[5]{6106}$	$\sqrt[5]{6016}$
162	1	dap fiind къ s	dap fiind къ r
162	1	пe fъкъtopȣл r	пe fъкъtopȣл s
162	23	нȣ se пot	нȣ se пoate
164	18	8955112832	9855112832
164	19	1071312168	1071311168
164	24	Dintp'a	Dintp'ачeвaш
165	2	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{3}$
165	3	кȣ aпpoпie	кȣ aпpoпiepe
165	4	ръdъчiniлop пpintp'aчest	ръdъчiniлop ipaцionaлe пpintp'aчest
166	8	ръdъчinъ dakъ	ръdъчinъ, dakъ
166	15	ȣnimea adikъ	ȣnimea, adikъ
167	6	$\frac{2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{2}{3}}=$	$\frac{2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{3}{2}}=$

Фаца,	рꙟндꙋл,	кꙋm este,	кꙋm требꙋе съ fie,
167	9	ꙟнкъ ші ла а шаѕеа	ꙟнкъ ші ла а чінчеа
168	16	din пѫmitop	din пꙋmitop
170	10	fрꙟн zечimалъ	fрꙟнцереа zечimалъ
171	13	ші ва fi $0,=\frac{50}{100}$;	ші ва fi $0,50=\frac{50}{100}$;
172	5	мꙋлte note	мꙋлte цifpe
174	31	163670 шчл.	163676 шчл.
175	19	$..=3,723....$	$..=2,723....$
175	25	пріп кътimілеалъ-тꙋpate	пріп кътimіле алъ-тꙋpate
177	8	este d'oпotpi ъ	este d'oпotpiвъ
177	17	$\frac{m}{a}-\frac{b}{m}$	$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$
179	5	къ amꙟndoъ	къ din amꙟndoъ
181	1	кpeskътoape $b>a$,	кpeskътoape, ꙋnde $b>a$,
181	2	skъzътoape $q<1$;	skъzътoape, $q<1$;
181	10	se ва ꙟmпърці	se вор ꙟmпърці
183	19	$b=aq$,	$b=ap$,
184	23	$\frac{a}{c}:\frac{b}{a}$	$\frac{a}{c}:\frac{b}{d}$
185	21	se ва поатеа	se ва пꙋтеа
185	24	$x=\frac{b}{a}$	$x=\frac{bc}{a}$
185	25	съ se fakъ екꙋаці	съ se fakъ екꙋація
187	1	ва fi $=aq.q=cq^2$.	ва fi $=aq.q=aq^2$.
188	15	5) $d:b=a:c$	5) $d:b=c:a$
189	11	аї къріа temeнї	аї къріа tepmeнї
190	15	$d=bq$	$d=cq$
191	24	ші чел de ал доїлеа	ші чел de ал треїлеа

Фаца,	рѫndꙋл,	кꙋm este,	кꙋm тrebꙋe сѫ fie
192	29	къ Iекъtорі	къ fькъtорі
193	7	$a:b=c;d$	$a:b=c:d$
193	10	saꙋ̆ $(a\pm c)$	saꙋ̆ $(a\pm e)$
194	18	чea d'ѫntѫĭ прin *ba*	чea d'ѫntѫĭ прin *be*
196	2	ав fi	ва fi
196	6	шi $\frac{c}{a}=pq.$	шi $\frac{e}{a}=pq.$
197	21	шi $b=aq$	шi $b=ap$
199	3	кътimiле *A* шi *b*	кътimiле *B* шi *b*.
200	26	56 miчꙋрĭ	56 miлꙋрĭ
201	25	$3:24=5:x$	$3:34=5:x$
204	11	atꙋnчĭ шi челе-л-алte	ѫn вреmе кѫnd челе-л-алte
204	12	d'опоtрівъ, шi ра-порtꙋл	d'опоtрівъ, atꙋnчĭ рапорtꙋл
205	5	asemenea nostaв ѫnsъ	asemenea nostaв, ѫnsъ
205	9	ачеаш кътime	ачеаш лъцime
206	26	sапъ ꙋn шанц	sапъ ѫn 20 ziле ꙋn шанц
207	3	20 *z* . о *r*	20 *z* : 10 . *r* :
207	20	ка съ sапе ꙋn шанц	ка съ sапе ѫn 8 ziле ꙋn шанц
207	20	de 120 stѫnжinĭ	de 220 stѫnжinĭ
207	21	4 stѫnжinĭ ларг шi 2 stѫnжinĭ adѫnк?	4 пічоаре ларг шi 2 пічоаре adѫnк?
208	3	2 пічоаре грos,	25 deцete грos,
208	11	10 — 5 — 2 —	$10 — 5 — 2\frac{1}{12} —$
208	19	$x=3478\frac{358}{537}$	$x=3478\frac{358}{539}$

Фаца,	рѫndꙋл,	кꙋm este,	кꙋm требꙋе съ fie
211	19	$55\frac{86}{173}$ кр.	$55\frac{85}{173}$ кр.
213	5	логарitmꙋл de-ꙟm-mꙋлцitꙋлꙋї	логарitmꙋл de-ꙟm-пърцitꙋлꙋї
213	25	$log.\frac{5a^n(a^2-x^2)}{3b^3(c-x)^4}=$	$log.\frac{5a^n(a^2-x^2)^2}{3b^3(c-x)^4}=$
214	15	$3\,log.\,a+\frac{n}{2}$	$3\,log.\,a+\frac{2}{n}$
214	17	(§. 268.),	(§. 208.),
214	20	§ 336	§ 366
215	25	dintр'aчestѣase пot гъsi	dintр'aчestѣa se пot гъsi
216	8	обiчnꙋiцї аꙋ̆	обiчnꙋiцї аре
217	14	5,623412	5,623413
218	11	Matematiчї	Matematiчi
218	26	$=\frac{6582}{100000}$;	$=\frac{6583}{100000}$;
219	4	$=\frac{6583}{165}$	$=\frac{6583}{10^5}$
220	3	$=3$, *m* dакъ	$=3$, *m*, dакъ
224	27	$log.\frac{0,0736}{0,8237}$	$log.\frac{0,0736}{0,9237}$
225	25	$=6,0069287$	$=6,9069287$
226	9	$-0,0919078$1	$-0,9190781$
226	23	логарitmꙋл кърꙋiа	логарitmꙋл каре
228	8	0,7447275	$0,7447275-1$
228	23	$=2,1643729$	$=2,1643529$
229	27	de ꙟmпърцit	de sꙋбt ръdъчinъ
230	22	$9809=8,9955913$	$9899=3,9955913$
231	24	$=0,698700$,	$=0,6989700$
232	2	ꙟndatъ, 10	ꙟndatъ 10,

Фаца,	рꙟndȣл,	кȣm este,	кȣm требȣе sъ fie
232	14	$=10,272117,$	$=10,2712117,$
233	13	$=6,9502817-1$	$=0,9502817-1$
234	8	$=2257725=log.$	$=0,2257725=log.$
235	2	dap $log.x=$	dap $log.5=$
235	3	dъ : $log.x=$	dъ : $log.\sqrt{5}=$
236	11	ва fi $P=Q$	ва fi іаръшї $P=R$
239	30	екȣація $x=3y$;	екȣація $x=2y$;
240	8	aї кърора пȣmitopї	aї кърора пȣmitopї
244	8	кȣ x^m ва da	кȣ x^m, ва da
246	6	ꙟntp'o парte aeкȣ-ацieї	ꙟntp'o парte a екȣ-ацieї
248	11	$\sqrt{\frac{d(2b-df)}{c(2a-af)}}$	$\sqrt{\frac{d(ab-df)}{c(2a-cf)}}$
250	18	saȣ̆ skoboрꙟndȣ-se	saȣ̆ skoцindȣ-se
251	18	$x^2+2x-17=0,$	$x^2+2x-15=0,$
252	9	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}p^2+q\right)}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2+q\right)}$
252	11	чea пекȣnoskȣtъ	чea кȣnoskȣtъ
252	16	$q>\frac{1}{2}p^2$	$q>\frac{1}{4}p^2$
253	4	пріn ȣрmаре $=x$	пріn ȣрmаре $x=$
253	20	$-6acx$ ва da	$-6a$ç ва da
264	4	$\frac{1}{\sqrt{5}})=$	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}})=$
267	8	ва fi ші P ші Q	вор fi ші P ші Q
267	17	§. 119, Тоції	§. 119, тоції
269	13	$\left(2\sqrt{A}+\frac{B+D}{2\sqrt{B}}\right)$	$\left(x\sqrt{A}+\frac{B+D}{2\sqrt{B}}\right)$
271	21	aчesten peцȣрї	aчeste пpeцȣрї
274	18	din екȣаціе	din екȣація
276	5	ꙟn лoкȣл y пре-цȣл	ꙟn лoкȣл лȣї y прецȣл

Фаца,	рѫndꙋл,	кꙋm este,	кꙋm ҍребꙋе sъ fie
278	17	$\frac{28-4}{4}=16$	$\frac{28-4}{4}=6$
289	18	Iap dakъ	Kѫnd dap
290	2	кape кꙋаціе .... = o de ꙋnde	кape екꙋаціе....=o, de ꙋnde
292	1	ѫntѫꙋa екꙋаціе	екꙋаціе
296	28	$2y^2 =$	$2y^n =$
299	7	— 10 ла	— 10. Ла
299	8	ѫntѫꙋa ѫntѫmплape, fiind	ѫntѫꙋa ѫntѫmплape fiind
299	10	$y=4$ ла	$y=4$. Ла
299	12	ѫntp'ачеꙋаш екꙋа-ціе ва еші,	ѫntp'ачеꙋаш екꙋа-ціе, ва еші,
304	20	пꙋтере ѫntѫioape	ѫntѫitoape
305	18	$m-\frac{hy}{a}$	$m-\frac{by}{a}$
309	18	— 35 sꙋб ачꙋаstъ	— 35; sꙋб ачꙋаstъ
312	12	des кpeskъtoape	deskpeskъtoape
315	33	$s=z+(z+d)+(z-2d)+(z+3d)$	$s=z+(z-d)+(z-2d)+(z-3d)$
323	6	$a^2 . b^2 = a : c$	$a^2 : b^2 = a : c$
323	16	пъtpatꙋл tepmi-пꙋлꙋї	a patpa пꙋtepe a tepminꙋлꙋї
323	17	кътpe пъtpatꙋл челꙋї	кътpe a patpa пꙋ-tepe a челꙋї
325	24	$\sqrt[4]{(fg)^3}=\sqrt{fg}$;	$\sqrt[4]{(fg)^2}=\sqrt{fg}$;
331	2	$\frac{log.z-log.a}{l\ og.q}$	$\frac{log.z-log.a}{log.q}.+1$
337	27	(§. 475) аша dap	(§. 475), аша dap

ЕЛЕМЕNТЕ

DE

АЛЦЕБРЪ

§. 1.

Tot лȣкрȣл, каре se поate тъpi кȣ adъогаре de пърцĭ asemenѣa, saȣ̆ каре se поate тікшора кȣ sкъdepѣa лор, аре кътime, saȣ̆ търime.

§. 2. Matematіка este щіinца кътіmілор, каре, черчеtînd пропрietъціле лор, ші рапортȣріле че аȣ̆ în-tре еле, deduче de акоЛо регȣлĭ: saȣ̆ sпре a продȣ-че търimĭ, каре sъ împлinѣaskъ кondiціiле черȣte: saȣ̆ sпре a хоtъpî кътimĭ некȣnoskȣte din рапортȣріле лор кȣ челе кȣnoskȣte.

§. 3. Кътimѣa пічĭ ȣнȣĭ лȣкрȣ нȣ se поate аръta абsолȣt прin ѣа însъш, чі нȣmaĭ se компар întре еле лȣкрȣріле челе asemenѣa, ші se хоtъреще търimѣa ȣнȣĭ лȣкрȣ despre челъЛалt. Îndелеtnічірѣа чѣа maĭ прінчіпалъ a Matematічіĭ stъ în asfeл de компараціĭ a кътimілор, ші în deskoпepipѣa рапортȣрілор че аȣ̆ ачеstѣа întре еле, каре рапортȣрĭ adese орĭ sînt atît de askȣnse, înкît нȣmaĭ кȣ mape meщешȣг se поt aфла.

§. 4. Matematіка se împарte în кȣратъ saȣ̆ teopetікъ ші în апЛiкатъ; чѣа d'întîĭ прівеще търimѣa saȣ̆ кътimѣa într'o înцелецере абstрактъ, фъръ înкліnаре кȣ вре ȣн обжеt реал; чѣаЛалtъ tрактѣазъ despre търimĭ

ріпе, дѹпъ кѹm se афлъ еа ꙟн пропріетъціле fisiче а-
ле лѹкрѹрілор; adікъ, ꙟн волѹmѹл лор, ꙟн греѹtatea, пѹterea, mішкареа шчл. але лор; Matematiка практікъ пресѹпѹне пе чеа teoретікъ, але кърia регѹлї џенерале se апльакъ ла кътimї sпечіале.

Despre рапортѹріле челе maї џенерале але Кътimілор.

§. 5. Доъ кътimї de ачелаш неam A ші B, орї sꙟnt d'опотрівъ, saѹ непотрівіte ѹна кѹ алta. Рапортѹл лор чел d'ꙟntꙟї se esпрimъ кѹ semнѹл $=$ каре se пѹне ꙟntре кътimіле компарате, adікъ $A=B$ (A este d'опотрівъ лѹї B) каре формѹлъ se пѹтеще Екѹаціе; Iар dакъ кътimіле A ші B нѹ вор fi d'опотрівъ, чі ѹна dintре еле, sпре пілдъ A ва fi maї mаре декꙟt чеалалтъ B, ачеst рапорт se esпрimъ ꙟntр'ачеst кіп $A>B$ (A este maї mаре декꙟt B), saѹ $B<A$ (B este maї mік декꙟt A).

§. 6. Dакъ A ва fi d'опотрівъ лѹї B, ꙟн локѹл лѹї A se поate пѹне B, ші віче верса. Челе d'опотрівъ se пот пѹне ꙟн локѹл челор d'опотрівъ.

§. 7. De ва fi $A=B$ ші $C=B$ ва fi ші $A=C$; saѹ челе d'опотрівъ ла ал треілеа sꙟnt d'опотрівъ ші ꙟntре еле,

§. 8. Sъ zічем къ $A>B$ ші $B=C$; atѹнчї ва fi ші $A>C$; ші de ва fi $B>C$ кѹ atꙟt maї mѹлt ва fi ші $A>C$.

§. 9. Adѹнареа кътimілор asemeнеа ꙟн sѹmъ se esпрimъ кѹ semнѹл $+$ че se пѹне ꙟntре еле; fie S кътimеа компѹsъ din пърціле A, B, C, D, ші ва fi $S=A+B+C+D$; saѹ totѹл este d'опотрівъ кѹ пърціле sале лѹate ꙟmпреѹнъ; saѹ totѹл este maї mаре декꙟt орї каре парte a sa.

§. 10. Dакъ ꙋneĭ пърцĭ din екꙋаціа $A = B$ se ва adъога кътimеа C, atꙋnчĭ екꙋаціе нꙋmaĭ poate fi, пentpꙋ къ $A + C > A$ шi de ачеа шi $A + C > B$. Іар daкъ ла fieш каре парte din екꙋаціе se ва adъога ачеаш кътime, saꙋ кътimĭ d'опотрівъ, atꙋnчĭ шi sꙋmеле лор вор fi d'опотрівъ; adiкъ de ва fi $A = B$ шi $C = D$, ва fi $A + C = B + D$.

§. 11. Dакъ ла челе d'опотрівъ se вор adъога кътimĭ nепотрівite, шi віче верsa, atꙋnчĭ шi sꙋmеле лор вор fi nепотрівite; adiкъ daкъ ва fi $A = B$ шi $C > D$, ва fi шi $A + C > B + D$. Ꙟn sfꙟршit daкъ $A > B$ шi $C > D$, ва fi шi $A + C > B + D$.

§. 12. Ѕemnꙋл — nꙋs ꙟntpe doъ кътimĭ A шi B ꙟnsemnеазъ къ din кътimеа A тpeбꙋe sъ se skoaцъ кътimеа B; ръmъшiца dap ва fi $= A - B$.

§. 13. Екꙋаціа $A = B$ se stpiкъ daкъ dintp'o парte se ва skoate кътimеа C къчĭ $B > B - C$ шi de ачеа шi $A > A - C$. Іар daкъ din amꙟndoъ пърціле Екꙋаціi se ва skoate ачеꙗш кътime, saꙋ кътimĭ d'опотрівъ, atꙋnчĭ ръmъшiцеле вор fi d'опотрівъ; adiкъ de ва fi $A = B$ шi $C = D$, ва fi шi $A - C = B - D$.

§. 14. Dакъ din челе d'опотрівъ se вор skoate кътimĭ nепотрівite, шi віче верsa, atꙋnчĭ ръmъшiцеле вор fi nепотрівite. Фie $A = B$ шi $C > D$, ꙟn ꙟntꙟmплареа d'ꙟntꙟĭ ва fi $A - C < B - D$; ꙟn чеаалалтъ $C - A > D - B$. Ꙟn sfꙟршit de ва fi $A > B$ шi $C < D$ ва fi $A - C > B - D$.

§. 15. Matematiка кꙋратъ se ꙟmпарте ꙟn Арitmetiкъ шi Џеометріе; Џеометріа тpaктеазъ despre кътimĭ конціnꙋte, saꙋ despre лiniĭ, sꙋpfeце шi тpꙋпꙋрĭ; шi обжетꙋл еĭ este ꙟntinderеа. Арitmetiка черчетеазъ кътimiле despърціte, компꙋse de mꙋлціmеа пърцiлор.

§. 16. Ꙋnime se nꙋmеще кътimеа ачеа кꙋ каре se компар челелалте кътимї de ачелаш fел, ка sъ se кѹnoaskъ че тъpimї аѹ ачелеа despre ачеаsta; аша лѹнџimiле se esпpimъ прin лiniе каре sъ иа dpent о ѹnime: sпpe пildъ прin лiniа de о палмъ saѹ de ѹn пiчiор; sѹpfeцеле прin пiчiорѹл пътрат; волѹмеле прin пiчiорѹл кѹбiк; греѹтъцiле прin окале; банiї прin леї шчл. Орї че кътimе se поате лѹа de ѹnime: adiкъ ѹnimiле лѹнџimiлор орї sint stinжenї, saѹ пiчiоаре, saѹ deџete; греѹтъцiле, банiї шчл. аѹ иаръш мѹлте fелѹрi de ѹnimї; de ачеа fаче тpeбѹinцъ ка ин орї че интимпларе sъ se sпѹe ѹnimеа прin каре se esпpimъ оаре каре кътimе.

§. 17. Кътimiле se хотъръsк прin пѹмере, adiкъ прin рапортѹрiле че аѹ кѹ ѹnimеа лор; sпpe пildъ: dакъ кътimеа ва fi d'опотрiвъ кѹ ѹnimеа, saѹ dакъ кътimеа ва fi маї маре de доъ saѹ треї орї декит ѹnimеа, атѹнчї se иnsemnеазъ кѹ пѹмiрiле 2, 3 шчл аша dар пѹмерiле, ин инцелеџереа абstрактъ, fъръ de инклiнаре кѹ лѹкрѹрiле че еле esпpimеазъ, se пот sокоti ка нiще кътimї.

§. 18. Арiтметiка есте щiinца пѹмерiлор каре esплiкъ пропрiетъцiле лор шi инваць а ле deskомпѹне шi а ле компѹне ин deosебite кiпѹрї, шi прin мiжлочiреа ачестор лѹкрърї а skоате пѹмере некѹnoskѹte din рапортѹрiле date че ачестеа аѹ кѹ алте пѹмере кѹnoskѹte. Арiтметiка вѹлгаръ se слѹжаще кѹ пѹмере хотъръте; Алџебра saѹ Арiтметiка џенеpалъ пѹ dъ пѹмерiлор нiчї ѹн пpeц хотъpit, шi ин локѹл лор интребѹinцеазъ лiтере.

§. 19. Нѹмере џенерале saѹ нехотъръте se ziк ачелеа каре п'аѹ нiчї ѹн пpeц пропрiѹ; dар пот инfъцiша орї че пѹмере sпечiале. Asfел de пѹмере se esпpimъ кѹ лiтерiле челе мiчї але алfабетѹлѹї a, b, c, ... x, y, z. Кѹ тоате къ орї каре dintр'ачесте лiтере поате съ арате toate нȣмеріле, dар сȣнт літере deoseбіte требȣе съ se ꙟsemneze ші нȣмере deoseбіte; аша dар *a* нȣ se поате пȣне ꙟн локȣл лȣї *b*; нічї ꙟн локȣл лȣї *c* шчл, dакъ нȣ se ва sокоti къ ачелѣа сꙟнт ꙟнтре sine d'опоtрівъ.

§. 20. Нȣмеріле џенерале se хоtъръsк, dакъ лі se вор da прецȣрї sпечіале; ꙟн ꙟнtꙟмпларѣа ачѣаsta ꙟн локȣл літерілор *a*, *b*, *c*, . . . требȣе съ se пȣе прецȣріле лор; аша dар de se ва sокоti $a=7$ saȣ̆ $b=3$; ꙟн локȣл лȣї *a* se ва sкрі 7, ші ꙟн локȣл лȣї *b*, 3; sпре пілdъ $a+b=7+3$.

§. 21. Dакъ вор треБȣі съ se sкоацъ кътимї некȣноsкȣte din рапорtȣріле че аȣ̆ ачеstѣа кȣ челе кȣноsкȣte, ꙟн локȣл челор d'ꙟнtꙟї se ꙟнtреБȣінцѣазъ ꙟн лȣкраре літеріле челе din ȣрмъ але алфабеtȣлȣї *u*, *x*, *y*, *z*; iар пенtрȣ челе кȣноsкȣte, але кърора прецȣрї adese орї se sокоtesк хоtърꙟte, se пȣн літеріле челе маї din nainte *a*, *b*, *c*, шчл.

§. 22. Кътимї опȣсе saȣ̆ контраріе сꙟнт ачелѣа каре stрꙟнгꙟndȣse ꙟн sȣмъ se stрікъ ȣна пе алta, saȣ̆ de tot, saȣ̆ нȣмаї ꙟн парте; asfел сꙟнт доБꙟнda ші пагȣБа, аверѣа пропріе ші streінъ, крещерѣа ші miкшорарѣа, miшкарѣа ꙟн dірекції ꙟмпротиBitoаре, пȣtерї лȣкрътоаре ꙟн dірекціе опȣсъ ші челе лалте. Съ se порнѣаскъ ȣн трȣп кътре ръsърit 10 пічіоаре, dȣпъ ачѣа tot ачелаш трȣп съ se ꙟнtоаркъ кътре апȣс 7 пічіоаре; sпаціȣл че трȣпȣл ачела а̂ алергаt ꙟнtр'ачеste времї, sокоtindȣse ꙟн sine, ва fi d'опоtрівъ лȣї $10+7=17$ пічіоаре; iар de se ва лȣа ꙟн Бъгаре de sѣамъ dірекціа miшкърії ші se ва кътȣta sпаціȣл че а fъкȣt трȣпȣл кътре ръsърit, ачеst sпацїȣ̆ ва fi $=10-7=3$; adекъ кȣ atꙟtѣа пічіоаре s'а miшкаt трȣпȣл кътре ръsърit ꙟн sfꙟршitȣл времії а doiлѣа. Ꙟнtр'ачѣаstъ ꙟнцелеџере miшкарѣа кътре ръсърit ші кътре апъs sɪnt кътimi kontrapie, saŭ оппъse, пентрѹ къ adѹnɪndѹse ɪn sѹmъ se strikъ ѹna пе aлta.

§. 23. Кътimiлe kontrapie se deosebesk прin semneлe $+$ ші $-$; прекѹm ɪn екzemплѹл de sѹs: dakъ miшкарea кътре ръсърit se ва esпрima кѹ semнѹл $+$, чеaлaлtъ miшкаре оппѹsъ кътре апѹs tребѹe sъ se ɪnsemneze кѹ semнѹл $-$. Кътimiлe челe d'ɪntɪĭ se нѹmesk позitiве, saŭ afipmatiве; spre піldъ $+ a$ (se чiteще плѹs a); челе dѹпъ ѹрmъ se нѹmesk nerатiве $- b$ (se чiteще minѹs b).

§. 24. Asemenea ші нѹmepiлe каре аŭ ɪnaintea лор semne kontrapie se пот sokoti ка niще кътimĭ оппѹse, fiind къ adѹnɪndѹse ɪn sѹmъ se mikшореазъ ѹнѹл пе aлtѹл; spre піldъ $+ a - b$; semнѹл позitiв ɪnsъ de ла ɪnчепѹt se поate лъsa neskpis.

§. 25. Нѹмърѹл хотърɪt че se пѹne ɪnaintea кътimiĭ nехотърɪte se нѹmeще konfъкътор ал челiĭ ѹрmътоаре, ші еsпресia компѹsъ din semn, din konfъкътор ші din кътimea ценаралъ se нѹmeще термin алцебрik. Spre піldъ $3a$, $-7d$ sɪnt терminĭ, 3 este konfъкътор ɪn чел d'ɪntɪĭ, 7 ɪn челъ-лалt.

§. 26. Konfъкъторiѹл аратъ de кɪте орĭ se konpinde кътimea nехотърɪtъ ɪn термin; adikъ:

$$2a = a + a$$
$$3a = a + a + a.$$

шчл.

$$\text{saŭ} \quad -2b = -b - b$$
$$-3b = -b - b - b.$$

шчл.

Кɪnd ачеastъ nехотърɪtъ n'аре konfъкътор tребѹe sъ se ɪnцелеагъ къ аре пе ѹnime, кѹ toate къ ачеasta нѹ se skpie; аша $a = 1 . a$; $- b = - 1 . b$.

Se поate ка кътimiле nехотърtte съ aibъ de konfъкътор шi пътере џенерале, прекъm tn tерminъл ma ал кърънa konfъкътор m арать къ a de attteа орi съ konpinde tn ma de ktte орi ъnimеа este konpinsъ tn m.

§. 27. Терmiнi asemenеа saъ omoџeni se zik ачеиа карii аъ кътimi nехотъртte d'опоtрiвъ, de шi вор авеа konfъкъторi deoseвiцi, saъ шi semne kontрарie; asfeл stnt $5a$, $7a$, $-8a$ шчл.

Терmiнi neasemenеа saъ eteроџeni se пъmesk ачеиа tn каре кътimiле nехотъртte stnt deoseвite, прекъm stnt челе ърmътoаре $3a$, $3b$, $-5c$, $-5x$ шчл.

§. 28. Кътime inкоmплексъ saъ monomiъ este орi че tерmin simплъ a, $3a$, $-5b$, шчл. кътime Комплексъ este adъnареа de maї mълцi tерmiнi simплi шi neasemenеа. Binom se пъmеще кътimеа ачееа каре se koмпъne din doї tерmiнi, прекъm $a+5$, $3a-2b$, шi Тrinom, ачееа каре se fаче din треї tерmiнi; asfeл stnt: $a-b+1$, $2a+3b-c$. шчл. Челе лалте кътimi komплексe se konpind sъnt o пъmiре de опще Полinom. Тermenii лор se ашазъ dъпъ рtndъл че аъ лiтерiле tn алfавet.

Пentръ Adъnаре.

§. 29. A adъna кътimi tnsemnеазъ a afла кътimеа ачееа каре съ fie d'опоtрiвъ tъtълор кътimiлор лъate tmпреънъ, шi каре se пъmеще съmъ a ачелора.

§. 30. Дакъ tерmenii de adъnat вор fi omoџeni шi nъ опиъшi, съma кътimiлор ва пъstра ачелаш semn шi ачеаш nехотъртtъ, dар konfъкъторiъл ва fi d'опоtрiвъ къ съma konfъкъторiлор tерmeniлор de adъnat; аша dар вom авеа $7a+5a=12a$

saъ $-2a-6a=-8a$

de опще $ma + na + fa = (m + n + f)\ a$

saŭ $- ma - na - fa = -(m + n + f)\ a$.

31. §. Терменiĭ оппѕшĭ шi d'опоtрiвъ se щерг прекѕm $3a - 3a = 0$; $- 5b + 5b = 0$; $ma - ma = 0$.

§. 32. Dакъ termeniĭ кор fi оппѕшĭ, омоџенĭ шi непоtрiвiџĭ, atѕнчĭ se skoate konfъкъtopiѕл tep-minѕлѕĭ челѕĭ maĭ mik din konfъкъtopiѕл tepminѕ-лѕĭ челѕĭ maĭ mape, difepenџa se adaorъ ла нехо-tъpita чєа de опще, шi ачєastъ esпpesie ÎnsemnÎndѕ-se кѕ semnѕл tepmenѕлѕĭ челѕĭ maĭ mape, ва fi sѕ-ma чepѕtъ; sпpe екzemплѕ:

ÎntÎĭ: $7a - 5a = 2a$.

fiind къ $7a = 5a + 2a$ de ачєа $7a - 5a =$
$5a + 2a - 5a = 2a$, къчĭ $5a - 5a = 0$ (§.31.)

ал doiлєа: $- 7a + 5a = - 2a$.

fiind къ $- 7a = - 5a - 2a$

de ѕnde $- 7a + 5a = - 5a - 2a + 5a = - 2a$.

къчĭ $- 5a + 5a = 0$.

De опще $ma - na = (m - n)a$, dакъ $m > n$,

saŭ $ma - na = -(n - m)a$, dакъ $m < n$.

§. 34. КÎnd sÎnt a se adѕna tepmenĭ etepoџенĭ, se skpiŭ toџĭ кѕ semneлe лор Întp'ѕn pÎnd; шi аша sѕma къtimiлор

$2b, - 8, + 3a, - 3c$, ва fi $= 3a + 2b - 3c - 8$.

§. 34. Къtimiлe комплексe se adѕн, кÎnd tepmeniĭ o-moџенĭ se кѕлег dѕпъ pегѕлiлe §. 30, 31, 32, шi кÎnd tepmeniĭ etepoџенĭ, каре нѕ se maĭ пot pedѕче, se ашez кѕ semneлe лор Întp'ѕn pÎnd.

Екzemплѕ:

I.

$$\begin{array}{rl} & a + 7b - 13c - 8d + 3e - f - h \\ & -4a - b + 12c + 9d + 3e - f + h \\ \hline \text{Sѕma} & = - 3a + 6b - c + d + 6e - 2f. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{II.} & 13a - 5b + 35c + 15d - 4e + 6f \\
 & 7a - 13b - 16c - 23d + 4e - 3g. \\
\hline
\text{Sȣma} = & 20a - 18b + 19c - 8d + 6f - 3g. \\
\text{III} & 5a + 3b - 7c - 8d + 9e + 3f. \\
 & 4a - 7b + 18c - 21d - 12e - 7f \\
 & a - b + 3c - 2d + 15e - 8f \\
 & -19a - 4b + 5c - d - 3e + 12f. \\
\hline
\text{Sȣma} & -17a - 9b + 19c - 32d + 9e.
\end{array}$$

Пentpȣ Skъdepe.

§. 35. Daкъ din sȣma a doъ кътimĭ se ва sкoate ȣna, тpeбȣe sъ pъmîe чeѧлaлтъ; aшa dap dîndȣ-se sȣma шi кътimѣa чe тpeбȣe sъ se sкoaцъ, чeѧлaлтъ se aфлъ пpin sкъdepe; Sȣmъ se пȣmeщe кътimѣa чe тpeбȣe sъ se miкшopeze; кътimѣa datъ este aчeѧa чe тpeбȣe sъ se sкazъ; шi чѣa чepȣtъ este pъmъшiцa, saȣ difepenцa întpe кътimѣa чe se miкшopѣazъ шi întpe кътimѣa. чe se sкade.

§. 36. Ȣpmѣazъ dap sъ ѭsъ кътimѣa din кape se фaчe sкъdepѣa, daкъ se ва adъoгa difepenцa лa кътimѣa чe se sкade, шi din тp'aчest пpinчiп se poate aфлa difepenцa. Фiind къ însъ тepmenii лa sкъdepe пot se fie пozitiвĭ saȣ negatiвĭ, тpeбȣe sъ se ѭ în бъгape de sѣamъ amîndoъ întîmплъpiле.

I°. Фie de-sкъzȣтȣл saȣ кътimѣa din кape se sкade $\pm a$ шi sкъzътopȣл saȣ чeѧa чe se sкade $+b$, шi ва fi $\pm a - (+b) = \pm a - b$; пentpȣ къ, daкъ лa кътimѣa $\pm a - b$ se ва adъoгa sкъzътopȣл $+b$, ва eшi sȣma $\pm a - b + b = \pm a$ кape este d'oпotpiвъ кȣ кътimѣa din кape se sкade.

2°. Фie кътimѣa de-sкъzȣтȣл $\pm a$ шi sкъzътopȣл $-b$, шi ва fi $\pm a - (-b) = \pm a + b$; пentpȣ къ daкъ лa кътimѣa $\pm a + b$ se ва adъoгa sкъzътopȣл $-b$

II.

ва еші sȣма $\pm a+b-b=\pm a$, каре este d'опотрівъ кȣ de-скъzȣtȣл. Амѫndoъ ѫntѫмплъріле se копрind ѫntр'o формȣлъ: $\pm a-(\pm b)=\pm a\mp b$, din каре se веde къ se поate гъsi diференца a doĭ термені, dакъ ла de-скъzȣtȣл se ва adъога скъzȣtȣл кȣ semnȣл skimбat.

§. 37. Dакъ скъzъторȣл ва fi комплексȣ, semnȣл fieще кърȣіа термin se skimбъ ѫn контраріȣ: adікъ dакъ din кътімеа $\pm a$ ва требȣі съ se skoaцъ $b-c$ вом авеа diференца $\pm a-(b-c)=\pm a-b+c$; fiind къ, dакъ ла кътімеа ачеаста se ва adъога скъzъторȣл $b-c$, ва еші іаръш sȣма $\pm a-b+c+b-c=\pm a$, каре este d'опотрівъ кȣ de-скъzȣtȣл.

§. 38. Аша dар diференца a doъ кътімĭ se поate afла, dакъ ла de-скъzȣtȣл se ва adъога скъzъторȣл кȣ semne skimбate.

Екzемплаȣрĭ.

I.	de-скъzȣtȣл	$15a+6b-8c-4d+7e-10f.$
	скъzъторȣл	$3a+9b-5c-9d-2e+5f.$
	semnеле skimбate:	$- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad -$
	diференца	$12a-3b-3c+5d+9e-15f.$

II.
$$3a-b+8c+13d-e-3f+2g.$$
$$-a+5b+8c+d-7e-3f-3h.$$
$$+ \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$
$$4a-6b+12d+6e+2g+3h.$$

§. 39. Лȣкрареа ва fi екzактъ кѫnd sȣма diференцііĭ че s'a aфлат ші a скъzъторȣлȣĭ кȣ semnеле неskimбate ва fi d'опотрівъ кȣ de-скъzȣtȣл (§. 36).

§. 40. Din §. 38 se desлȣшаще ші adевърȣл екȣаціілор ȣрмътоаре.

I. $2a-3b+7-(5a-3b+6)=$
$2a-3b+7-5a+3b-6=-3a+1.$

II. $8a + 10b - 12 - (-7a + 9b - 4) =$
$8a + 10b - 12 + 7a - 9b + 4 = 15a + b - 8.$

III. $a - b + 2c - 3d = a - (b - 2c + 3d)$ saŭ ши:
$a - b + 2c - 3d = a - b - (-2c + 3d)$
$a - b + 2c - 3d = a + 2c - (b + 3d)$

шча.

Пentpȣ ⊥mmȣлцipe.

§. 41. А ⊥mmȣлцi пȣmърȣл *a* пpin алtȣл *b*, ⊥nsemneazъ anpodȣче ȣn пȣmър din de-⊥mmȣлцitȣл *a* asfeл пpeкȣm se naшe ⊥mmȣлцitopȣл *b* din ȣnime. Nȣmърȣл aflat se пȣmeшe пpodȣкt; *a* ши *b* se пȣmesk фъкъtopĭ.

§. 42. Де-⊥mmȣлцitȣл noate sъ fie кътime de opĭ че feл, пpeкȣm, лinie, sȣpfaцъ, tpȣп, гpeȣtate, банĭ шчл; dap ⊥mmȣлцitopȣл nȣ noate fi алt декѫt пȣmър, ши пpodȣкtȣл totd'aȣna ва fi omoцen кȣ de-⊥mmȣлцitȣл. Adiкъ dakъ o гpeȣtate oape кape se ва ⊥mmȣлцi кȣ 7, пpodȣкtȣл ва fi гpeȣtatea de 7 opĭ maĭ mape декѫt de-⊥mmȣлцitȣл. ⊥n чeлe ȣpmъtoape sȣnt de ⊥mȣлцit se ⊥nцeлeцe a fi ȣn пȣmър.

§. 43. ⊥mmȣлцipea se apatъ saŭ кȣ кpȣче niezimъ $\times$, saŭ кȣ ȣn пȣnt пȣs ⊥ntpe фъкъtopĭ. Спpe niлdъ $a \times b$, saŭ $a.b$ ⊥nsemneazъ къ *a* tpeбȣe sъ se ⊥mmȣлцeaskъ кȣ *b*. Фъкъtopiĭ комплекшĭ se ⊥nkid кȣ napentes; пpeкȣm $(a+b) \times (c-d)$ saŭ maĭ simплȣ лепъd⊥nd semnȣл dintpe napentesȣpĭ: $(a+b)(c-d)$.

§. 44. Дin definiцia §. 41. se вede къ ⊥mmȣлцipea пpin пȣmър ⊥ntpeг nȣ se deoseбeшe de adȣnapea de-⊥mmȣлцitȣлȣĭ кape se pepetеazъ de attea opĭ de кѫte opĭ se кoпpinde ȣnimea ⊥n ⊥mmȣлцitop; aшa dap вom aвea:

$$5\times2=5+5=10.$$
$$5\times3=5+5+5=15.$$
шчл.

saŭ $a\times2=a+a=2a$
$$a\times3=a+a+a=3a.$$
шчл.

Де ѕnde tot deodatъ вedem къ konfъкъtoriĭ terminiлор алџевріческї ѕ↑nt fъкъtorĭ. (§. 26).

§. 45. Продѕкtеле nѕmeрілор хоtърѫte se пot аръta ↑nвedeрat, dар але челор nехоtърѫte nѕ se пot espріma ↑ntр'алt кіп, фъръ nѕmaĭ sкріinд fъкъtoriĭ ѕnѕл л↑nгъ алtѕл; sпре пілдъ $a\times b=ab$. Ші dакъ продѕкtѕл ab se ва ↑mmѕлці пріn c продѕкtѕл ва fi abc, каре ↑mmѕлцindѕse кѕ d ва da $abcd$ ші аша maĭ ↑nколо, de вор fi maĭ mѕлцї fъкъtorĭ.

§. 46. Де ва fi $a=b$, $c=d$, ва fi ші $ac=bd$; saŭ челе d'опоtрівъ ↑mmѕлцindѕse пріn nѕmeре d'опоtрівъ daŭ продѕкtѕрĭ d'опоtрівъ.

Іар к↑nd se ва sокоti $a=b$ ші $c>d$ atѕnчĭ ва fi $ac>bd$, saŭ de se ва sокоti $a>b$ ші $c=d$ ва fi ꙟаръшĭ $ac>bd$.

↑n sf↑ршit de ва fi $a>b$ ші $c>d$ ва fi ші atѕnчĭ $ac>bd$.

§. 47. I°. Доъ літере a ші b se пot mѕta ↑n доъ кіпѕрĭ: ab ші ba, ші se nѕmеще ачеastъ sкimваре п е р m ѕ t а ц і е.

2°. Дin treĭ літере abc fie-каре поate копрinde локѕл d'↑nt↑ĭ, saŭ орĭ каре алt лок, пънъ че se mѕtъ de доъ орĭ челелалtе доъ літере, adікъ:

abc	bac	cab
acb	bca	cba

Аша dар treĭ літере daŭ шase перmѕtaцiĭ, saŭ $2\times3=6$.

3-леа. Кꙟnd fie-каре din паtрȣ літере *abcd* копріnde локȣл d'ꙟntꙟї saȣ орї каре алтȣ, челе лалtе треї se пot mȣta de шase орї (N. 2) аша dар паtрȣ літере daȣ 24 пермȣtaції, adікъ $6\times4=2\times3\times4$ пе каре ле аратъ formȣла ȣрmътоаре:

a b c d	*b a c d*	*c a b d*	*d a b c*
a b d c	*b a d c*	*c a d b*	*d a c b*
a c b d	*b c a d*	*c b a d*	*d b a c*
a c d b	*b c d a*	*c b d a*	*d b c a*
a d b c	*b d a c*	*c d a b*	*d c a b*
a d b c	*b d c a*	*c d b a*	*d c b a*

De обще dакъ пȣmърȣл літерілор ва fi $=n$, пȣmърȣл пермȣtaціілор че пot da, ва еші $=2\times3\times4\times5\ldots\ldots\times n$.

§. 48. Ȣnimea ꙟmmȣлцітъ кȣ пȣmърȣл *a*, saȣ *a* ꙟmmȣлціt кȣ ȣnimea dъ продȣкtȣл $=a$; къчї dакъ sпре пілdъ se ва пȣne 1 de треї орї, saȣ 3 odatъ, ꙟn amꙟndoъ ꙟntꙟmплъріле продȣкtȣл ва fi $=3$, de ачеа de обще $1\times a=a\times1=a$.

§. 49. Dакъ орї каре парtе *a*, *b*, *c*, *d* шчл. din каре este компȣsъ кътimea *A*, se ва ꙟmmȣлці кȣ пȣmърȣл *f*, ші продȣкtеле ачеste парtікȣларе se вор adȣna, sȣma ва fi d'опоtрівъ кȣ продȣкtȣл че se наще din ꙟmmȣлціреа кътimiї *A* прin ачелаш пȣmър *f*; adікъ de ва fi $A=a+b+c+d+$ шчл. ва fi ші $Af=af+bf+cf+df+$ шчл. (§. 44.)

Фііnd къ $2=1+1$, ва fi ші:
$2\times a=1\times a+1\times a$ (§. 49.) $=a+a$ (§. 48.) $=a\times2$ (§. 44.)
Asemenea fiind къ $3=1+1+1$, ва fi ші:
$3\times a=1\times a+1\times a+1\times a=a+a+a=a\times3$, ші fiind къ tot ачелаш se поate аръtа кȣ кіпȣл ачеsta desпрѣ орї каре доі fъкъtорї, ва fi de обще $a\times b=ba$, saȣ

tot ачелаш продȣкt se наще de se ва ꙟmȣлцї орї a прin b saȣ b прin a.

§. 51. Съ se ꙟmȣлцеaскъ fъкъторȣл A ал продȣкtȣлȣї AB прin 2; шi вom авеа $2A \times B = (A + A) B = AB + AB = AB \times 2$.

Asemenea вom авеа:
$3A \times B = (A+A+A)\ B = AB + AB + AB = AB \times 3$.
шi de обще $fA \times B = AB \times f$; ꙟntр'ачесtaш кiп se поаtе аръtа шi despре челълалt fъкъtор B къ estе: $fB \times A = BA \times f$ saȣ $= AB \times f$ (fiind къ $BA = AB$ §. 50.) аша dар: $AB \times f = fA \times B = fB \times A$, adiкъ tot ачелаш продȣкt se наще dакъ орї продȣкtȣл AB saȣ ȣнȣл din fъкъторї A, B, se ва ꙟmȣлцї прin ачелаш нȣmър, spре пiлdъ $35 = 7 \times 5$, шi: $35 \times 3 = 21 \times 5 = 7 \times 15 = 105$.

§. 52. Фie трeї fъкъторї a, b, c, din §. 51. вom авеа: $ab \times c = ac \times b = bc \times a$; dар fiind къ $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$, (§. 50.) ва fi шi: $ab \times c = ba \times c$, $ac \times b = ca \times b$, $bc \times a = cb \times a$, шi de ачеeа $abc = bac = acb = cab = bca = cba$, каре тоаtе ачесtе шase продȣкtе копрind ꙟn sine тоаtе пермȣтацiiле а трeї fъкъторї a, b, c; (§. 47. N. 2.)

Аша dар трeї fъкъторї tot dеаȣна вор dа ачелаш продȣкt, орї кȣ че рꙟnd se вор ꙟmȣлцї.

§. 53. Съ пȣнem акȣm къ орї каре пермȣтацie de n fъкъторї dъ ачелаш продȣкt, tot ачеeаш ꙟнсȣшiре se поаtе аръtа шi despре fъкъторiї $n + 1$. Фie $P = abcd \ldots$ ш ч л., аї кърора fъкъторї fie ꙟn нȣmър $= n$; лъsꙟnd afaръ пе fъкъторȣл a, продȣкtȣл челор лалцї съ se ziкъ A, adiкъ

$A = b\ c\ d \ldots\ldots$ лъsꙟnd afaръ пе a; шi asemenea съ fie:
$B = a\ c\ d \ldots\ldots$ лъsꙟnd afaръ пе b;
$C = a\ b\ d \ldots\ldots$ лъsꙟnd afaръ пе c;

$D = a\ b\ c \ldots\ldots$ лъsînd afаръ пе d;

шчл.

Орї каре dintp'aчеste продѕкte ва копрinde фъкъторї $n - 1$, шi ва fi $Aa, = Bb, = Cc, =$ шчл. $= P$. Dѕпъ sѕпоziцie, шi adъorînd ѕѕe ѕи поѕ́ фъкътор k вom авеа шi 'atѕнчї $Ak \times a = Bk \times b = Ck \times c = Dk \times d =$ шчл. $= Pk$ (§. 51.) Dap Ak este продѕк-tѕл de n фъкъторї $b, c, d \ldots k$ але кърора перmѕ-taцiї dѕпъ inotez daѕ́ продѕкte d'опоtpiвъ, шi de ачеа d'опоtpiвъ шi лѕї Ak че este ѕна din еле шi dакъ fie каре dintp'aчеste перmѕtaцiї se вop mmmѕлцi кѕ a, орї каре продѕкt ва fi $= Ak \times a$; aчest шip de tepmenї d'опоtpiвъ съ se zікъ sepia întîї. Bk este продѕкtѕл de n фъкъторї $a, c, d \ldots\ldots k$ але кърора перmѕtaцiї daѕ́ продѕкte $= Bk$; шi орї каре din еле înmmѕлцindѕ-se кѕ b дъ продѕкtѕл$= Bk \times b$; aчest шip съ se nѕmeaскъ sepia a doъa.

Sepia a tpeа ва копрinde toate перmѕtaцiiле, înmmѕлцite кѕ c, de n фъкъторї $a, b, d \ldots k$, din каре este kompѕs Ck шi орї каре tepmin ва fi$= Ck \times c$. Кѕ кiпѕл aчеsta se nasкѕ́ atîtea sepiї кîte кътimї, $Ak \times a$, $Bk \times b$, $Ck \times c$, шчл. Чеа maї dѕпъ ѕpmъ sepie ва копрide перmѕtaцiiле de n фъкъторї $a, b, c, d \ldots\ldots$ (лъsînd afаръ пе k) din каре se наще P, каре toate înmmѕлцindѕ-se кѕ k daѕ́ atîtea продѕкte $= Pk$. Шi fiind къ $Ak \times a = Bk \times b = Ck \times c =$ шчл. $= Pk$, nѕ nѕmaї tepmeniї în fiекаре sepie deoseвit, чi шi tepmeniї tѕtѕлop sepiiлop вop fi d'опоtpiвъ întpe sine. Toate перmѕtaцiiле de $n + 1$ лiтepe $a, b, c, d, \ldots k$ se пot afла кînd fie каре лiтеpъ копрinzînd локѕл чел xotъpît, sпpe піldъ чел dѕпъ ѕpmъ, челе лалte n лiтepe se вop mѕta d'atîtea орї, декîte орї ва fi кѕ пѕtinцъ (§. 47.) de aчеа sepiiле de maї sѕs копрind toate перmѕtaцiiле de $n + 1$

фъкъtopĭ *a b c d*.... Аша дар дакъ toate пертȣta-ціiле de *n* фъкъtopĭ даȣ продȣкte d'опоtрiвъ, требȣе негрешit ка ші toate пертȣtaціiле de $n + 1$ фъкъtopĭ sъ dѣа продȣкte d'опоtрiвъ.

§. 54. Фіеш каре sepie §. 53. ва копрinde 2. 3. 4. 5.....*n* tepmenĭ (§. 47); de ачeste sepiĭ sꙟnt $n + 1$ (adiкъ atꙟtѣа кꙟцĭ фъкъtopĭ *a*, *b*, *c*, *d*,.....*k*), de ачеѣа toate sepiiле ꙟпреȣнъ копрind 2. 3. 4. 5.....*n* $(n + 1)$ tepminĭ каре este ші нȣ-мърȣл пертȣtaціiлор de $n + 1$ лitepe (§. 47.)

§. 55. Ꙟn §. 52. s'a арътat къ треĭ фъкъtopĭ даȣ tot ачелаш продȣкt, орĭ ꙟн че рꙟnd se вор ꙟmmȣлці; аша дар ꙟn нȣtepѣа §. 53. tot ачеѣаш ꙟnsȣшipe se кȣвine ші ла патрȣ фъкъtopĭ, ла чinчĭ, ла шаse ла шапte, saȣ ла орĭ каре нȣmър de фъкъtopĭ, de ȣnde ꙟn sфꙟрші t se поate фаче конклȣzie: къ ачеѣаш фъкъtopĭ даȣ ачелаш продȣкt, орĭ ꙟн че рꙟnd se вор ꙟmmȣлці.

§. 56. Dакъ ȣn tepmin алџебрік ва требȣі sъ se ꙟnmȣлџѣаskъ кȣ алtȣл, se вор ꙟmmȣлці maĭ ꙟntꙟĭ конфъкъtopiĭ, ші продȣкtȣл лор se ва пȣне ꙟnaintѣа продȣкtȣлȣĭ рехоtърꙟtелор, каре se обічнȣеще а se пȣне ꙟn рꙟnd дȣпъ алфабеt прекȣm se deslȣшаще пріn §. 55.

Sпре пілдъ $2a \times 3b = 6ab$; къчĭ $2a = 2 \times a$ ші $3b = 3 \times b$; пріn ȣрmаре $2a \times 3b = 2 \times a \times 3 \times b = 2 \times 3 \times a \times b = 6ab$. Tot ачѣаstъ лȣкраре se поате фаче ші кȣ maĭ mȣлцĭ фъкъtopĭ; sпре пілдъ $2a \times 3b \times 5c = 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c = 30\,abc$.

§. 57. Dакъ ȣn нȣmър se ва ꙟmmȣлці пріn sine ꙟnsȣшĭ одаtъ saȣ de maĭ mȣлte орĭ, продȣкtȣл че ese se нȣmеще Пȣtepe а нȣmърȣлȣĭ ачелȣѣа; *aa* este адоа; *aaa* este а трѣа пȣtepe а нȣmърȣлȣĭ *a*, каре se зiче ръdъчinъ а ачеstор пȣtepĭ. Пentpȣ sкȣркаре нȣmърȣл fъкъtорілор d'опоtрівъ че se копрind ꙟн пȣtере se ꙟnsemneazъ dea dреапta ръdъчinеĭ sȣs; adiкъ ꙟн лок de aa, aaa, $aaaa$ шчл. se пȣne a^2, a^3, a^4, шчл. De обще a^m аратъ пȣtереа m а ръdъчinеĭ a, нȣmърȣл m se нȣmеще Esпȣnentȣл пȣtерiĭ, шi аратъ нȣmърȣл fъкъtорілор d'опоtрівъ кȣ ръdъчina a din каре s'a нъsкȣt ачеastъ пȣtере. Ръdъчinіле komплекse se ꙟnкid кȣ паpentes adiкъ $(a+b)_m$ saȣ $(2a-3b+1)^n$ шчл. Кътimеа a este пȣtереа ꙟntîĭ а еĭ ꙟnsъшĭ, шi esпȣnentȣл еĭ ȣnimеа, saȣ $a=a^1$ каре de шi нȣ se пȣne, dар tребȣе sъ se soкotеаskъ ка de faцъ.

§. 58. Пȣtеріле ȣнеĭ ръdъчinĭ ꙟmmȣлцindȣse ȣna кȣ алta daȣ пentрȣ продȣкt пȣtереа ачеліаш ръdъчinĭ, ал кърia esпȣnent este d'опоtрівъ кȣ sȣam esпȣnenцілор fъкъtорілор, каре лȣкрȣ este ꙟnвеdеpat din formареа пȣtерілор.

Фiind къ: $a^2\times a = aa\,.\,a=a^3$ saȣ $=a^{2+1}$

$a^3\times a^2 = aaa\,.\,aa=a^5$ saȣ $=a^{3+2}$

$a^4\times a^3 = aaaa.\,aaa=a^7$ adiкъ $=a^{4+3}$

шчл.

De обще dар вom авеа $a^m\times a^n=a^{m+n}$.

Tot ачеiаш лȣкраре se faче шi кȣ треĭ шi кȣ орĭ каре нȣmър de fъкъtорĭ $a^m\times a^n\times a^r=a^{m+n}\times a^r=a^{m+n+r}$

шчл.

§. 59. Dакъ ръdъчinіле пȣtерілор вор fi deoseвite, fъкъtорiĭ se sкрiȣ ȣнȣл dȣпъ алtȣл, adiкъ $a^2\times b^3=a^2b^3$; saȣ $a^m\times b^n=a^mb^n$; шчл.

§. 60. Asemenea se komпȣн продȣкtеле ȣрmъtоаре, dȣпъ регȣліле date;

III.

Екzемпльрї:

I. $2a^2b \times 3ab \times 5c = 2 . 3 . 5 \times a^2 . a \times b . b \times c$
$= 30a^3b^2c.$

II. $3a^3b^4 \times 7a^5b^2 \times c^2 =$
$3 . 7 \times a^3 . a^5 \times b^4 . b^2 \times c^2 = 21a^8b^6c^2.$

III. $4a^mb^n c \times 6a^nb^3c^2 \times 2a^2b^r c^p =$
$48a^{m+n+2} . b^{n+r+3} . c^{p+3}.$

IV. $5a^2(a+b)^n(a-b)^2 \times 3b^3(a+b)(a-b)^n$
$= 15a^2b^3(a+b)^{m+1}(a-b)^{n+2}.$

§. 61. Dакъ кътimea nozitiвъ saѹ negatiвъ se ва ɪmmѹлцi кѹ nѹmър nozitiв, продѹктѹл ва пъstра semnѹл de-ɪmmѹлцitѹлѹї; пentрѹ къ:

$\pm a \times 2 = \pm a \pm a = \pm 2a.$

$\pm a \times 3 = \pm a \pm a \pm a = \pm 3a.$

каре se desлѹшеще din §. 41. аша dар вom авea de обще

$\pm a \times \pm b = \pm ab.$

§. 62. Іар dакъ кътimea nozitiвъ saѹ negatiвъ ва требѹi sъ se ɪmmѹлцеаskъ кѹ nѹmър negatiв, semnѹл продѹктѹлѹї ва fi оnnѹs semnѹлѹї че аре de-ɪmmѹлцitѹл; fie sпре niлdъ ɪmmѹлцitорѹл $= -2$. Ачest nѹmър se наще din ѹnime кɪnd ачеаsta se ва nѹne de doъ орї кѹ semnѹл skimбat; dар ɪn пѹtереа §. 41. продѹктѹл se наще din de-ɪmmѹлцitѹл ɪntр'ачелаш кiп прекѹm se наще шi ɪmmѹлцitорѹл din ѹnime; de ачеа $\pm a$ se ɪmmѹлцеще кѹ -2, кɪnd $\pm a$ se ва nѹne de doъ орї кѹ semnѹл skimбat; аша dар вom авea $\pm a \times -2 = \mp 2a$. Фiind къ tot ачеаstъ лѹкраре se поаte кѹ кiпѹл ачеsta desпре орї каре ɪmmѹлцitор negatiв, вom авea de обще: $\pm a \times -b = \mp ab.$

§. 63. Чеа че am zis ɪn §. 62. se поаte dоведi, шi ɪntр'ачest кiп: fiind къ este $b-b=0$, вom авea шi $\pm a (b-b) = \pm a \times b \pm a \times -b = 0$; партеа ɪntɪї $\pm a \times b$ а ачеstѹї продѹктѹкt $= \pm ab$. §. 61.

Чеа лалтъ парte тревȣе съ fie d'опотрiвъ шi опȣсъ ла чеа d'ꙟntꙟї, пentpȣ къ о stpiкъ, шi de ачеа
$\pm a \times - b = \mp ab$.

§. 64. Аша dap fiind къ este

$$\left.\begin{array}{l} +a\times+b=+ab \\ -a\times+b=-ab \end{array}\right\}\ \text{§. 61.}$$
$$\left.\begin{array}{l} +a\times-b=-ab \\ -a\times-b=+ab \end{array}\right\}\ \text{§. 62.}$$

продȣктȣл ва fï позitiв, dакъ doï fъкъторï вор авеа tot ачелеаш semne; iap dакъ semnele a doï fъкъторï вор fi контрарiï, продȣктȣл ва fi негатiв.

§. 65. Продȣктȣл fъкъторiлор позitiвï, орï каре ва fi нȣмърȣл лор, нȣ поate fi декꙟt позitiв; dap продȣктȣл fъкъторiлор негатiвï, орï ва fi позitiв saȣ негатiв, dȣпъ кȣm нȣмърȣл fъкъторiлор ва fi кȣ soцȣ, saȣ fъръ soцȣ. (Nȣмере кȣ soцȣ se zікȣ ачелеа каре se пot ꙟmпърцi екzакt кȣ 2, челе лалte sꙟnt fъръ soцȣ.)

Пentpȣ къ $-a\times-b=+ab$

$$-a\times-b\times-c=+ab\times-c=-abc$$
$$-a\times-b\times-c\times-d=-abc\times-d=+abcd.$$

Dакъ ла чеï dȣпъ ȣpmъ патpȣ fъкъторï негатiвï se ва adъога ал чiнчiлеа $-e$ продȣктȣл ва fi $-abcde$, каре прiн ал' шаселеа $-f$ iаръш se fаче позitiв, ш ч л.

§. 66. De ȣnde iаръшï se веde къ продȣктȣл че se наще din fъкъторï позitiвï шi негатiвï, ва fi позitiв, кꙟnd нȣмърȣл челор маï dȣпъ ȣpmъ ва fi кȣ soцȣ, алminтpелеа ва fi негатiв.

Екzemплȣрï.

I. $-3\times5a\times-7a^2b\times-2b^3c^2\times3a^2c=15a^3c\times-42a^2b^4c^2$
$=-630a^5b^4c^3$.

II. $(7a^m\times ca-b)^n\times-2a^3\times5(a-b)=70a^{m+3}\times(a-b)^{n+1}$.

§. 67. Фъкъторȣл комплексȣ se ѫmmȣлцеще кȣ ȣн inкомплексȣ ѫmmȣлцindȣ-se орї каре термin ал фъкторȣлȣї d'ѫнtѫї прin челъ лалt; adiкъ вом авеа:

$$(a-b)c=ac-bc$$
$$-(a-b)c=-(ac-bc)=-ac+bc.$$
$$(a-b)\times-c=-ac+bc.$$
$$-(a-b)\times-c=(a-b)c=ac-bc.$$

Екzemплȣрї.

I. $(2a^2+3ab-5b^2)\times7abc=14a^3bc+21a^2b^2c-35ab^3c.$

II. $(7a^mb-4b^nc+6c^3)\times-3ab^2c^r=$
$-21a^{m+1}b^3c^r+12ab^{n+2}c^{r+1}-18ab^2c^{r+3}.$

§. 68. Dакъ амѫndoї фъкторiї вор fi комплексї, ȣнȣл din eї съ se ѫmmȣлцеаскъ кȣ тоцї терminiї челȣї лалt, шi съ se adȣне продȣктеле партiкȣларе:

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd.$$
$$(a+b)(c-d)=(a+b)c-(a+b)d=ac+bc-ad-bd,$$
$$(a-b)(c-d)=(a-b)c-(a-b)d=ac-bc-ad+bd.$$

Adese орї продȣктеле партiкȣларе копрind термени asemenea, кȣ акърора редȣчере se faче сȣma маї simплъ.

Екzemплȣрї.

I. $(a+b)(a-b)=aa+ab-ab-bb=a^2-b^2.$

II. $(a+b)(a+b)=aa+ab+ab+bb=a^2+2ab+b^2.$

III. $(3a-7b)(2a+5b)=6a^2+ab-35b^2.$

IV. $(6a-4b+2c)(a+3b-5c)=6a^2+14ab$
$-28ac-12b^2+26bc-10c^2.$

V. $(7a+5b-3c)(7a-5b+3c)=49a^2-25b^2$
$+30bc-9c^2.$

§. 69. Кѫtimea комплексъ se ашазъ ѫн рѫнd dȣ-пъ пȣтереа ȣнеї нехотърѫte, пȣindȣse термени eї asfeл ка esпꙋnenцi̦ ачestop пꙋtepĭ sъ ꙋpmeze pɪndꙋʌ natꙋpaʌ аʌ пꙋтеріʌор, каре ʌꙋкрꙋ se поate faче, saꙋ̆ ꙋpкɪndꙋne ʌа чea maĭ mape, saꙋ̆ sковорɪndꙋne ʌа чea maĭ mікъ пꙋtepe. Asfeʌ поʌіnoaтеʌе $a-bx+2cx^2-5x^3$ ші $7x^4+3ax^3-bx^2+cx-d$ sɪnt пꙋse ɪn pɪnd dꙋпъ пꙋtepiʌе ʌꙋĭ x; asemenea тревꙋе sъ sokotim ші despre tpinomꙋʌ x^4-ax^2+b кꙋ toate къ ɪntp'ачeasta ʌinseskꙋ̆ пꙋtepiʌе x^3 ші x.

§. 70. Фъкъtopiĭ komпʌeksĭ se пot ɪmmꙋʌцi maĭ кꙋ ɪnʌesnipe, dakъ se вор optɪndꙋi dꙋпъ пꙋtepiʌе ꙋneĭ ʌitepĭ, skpiindꙋse ɪmmꙋʌцitopꙋʌ sꙋпt de-ɪmmꙋʌцitꙋʌ, ші dakъ продꙋktеʌе пaptikꙋʌape se вор пꙋne pɪnd asfeʌ ка tepmenіĭ omoцenĭ sъ fie ꙋnꙋʌ sꙋпt aʌtꙋʌ.

Екземпʌꙋрі.

I.

$$3a^2x^3-4a^3x^2+5a^4x-7a^5$$
$$2ax^2-6a^2x+3a^3$$
$$\overline{6a^3x^5-8a^4x^4+10a^5x^3-14a^6x^2}$$
$$-18a^4x^4+24a^5x^3-30a^6x^2+42a^7x$$
$$9a^5x^3-12a^6x^2+25a^7x-21a^8.$$
$$\overline{6a^3x^5-26a^4x^4+43a^5x^3-56a^6x^2+57a^7x-21a^8.}$$

II.

$$2x^4-7a^2x^2+5a^4$$
$$4x^3+6a^2x-3a^3$$
$$\overline{8x^7-28a^2x^5+20a^4x^3}$$
$$12a^2x^5-42a^4x^3+30a^6x$$
$$-6a^3x^4+21a^5x^2-15a^7.$$
$$\overline{8x^7-16a^2x^5-6a^3x^4-22a^4x^3+21a^5x^2+30a^6x-15a^7.}$$

III. $7a^{2n} - 5a^n\ x^m + 9x^{2m}$

$\ 3a^n - 2x^m$

$$\begin{array}{l} 21a^{3n} - 15a^{2n}x^m + 27a^n\ x^{2m} \\ \qquad\quad - 14a^{2n}x^m + 10a^n\ x^{2m} - 18x^{3m} \\ \hline 21a^{3m} - 29a^{2n}x^m + 37a^n\ x^{2m} - 18x^{3m} \end{array}$$

§. 71. De se ва къȣta продȣктȣл a tpeĭ saȣ a maĭ mȣлtop fъкъtopĭ комплексĭ, sпpe пілdъ $(2ax + 7b)$ $(3ax-2b)$ $(5ax-3b)$ съ se ꙟmmȣлцеaskъ чел d'ꙟntꙟȣ кȣ чел de aл doiлea, продȣктȣл лор съ se ꙟmmȣлцеaskъ кȣ aл tpeiлea, ȣpmꙟnd tot aша ші кꙟnd вom aвea maĭ mȣлцĭ fъкъtopĭ.

$$\begin{array}{l} 2ax + 7b \\ 3ax - 2b \\ \hline 6a^2x^2 + 21abx \\ \qquad\ - 4abx - 14b^2 \\ \hline 6a^2x^2 + 17abx - 14b^2 \\ 5a\,x - 3b \\ 30a^3x^3 + 85a^2bx^2 - 70ab^2x \\ \qquad\ - 18a^2bx^2 - 51ab^2x + 42b^3 \\ \hline 30a^3x + 67a^2bx^2 - 121ab^2x + 42b^3 \end{array}$$

Пentpȣ ꙟmпърціpe.

§. 72. Ꙟmпърціpea este o лȣкpape ꙟn кape o къtime se sокотеще ка ȣn продȣкт a doĭ fъкъtopĭ, ші dȣпъ че se кȣnoaще ȣnȣл din eĭ, съ se afлe челълалt. Кътimea ачеea se nȣmeще de-ꙟmпърціt, fъкъtopȣл dat ꙟmпърціtop, ші чел къȣtat Кꙟtȣ.

§. 73. Dакъ ꙟmпърціtopȣл este nȣmъp, кꙟtȣл ва fi omoџen кȣ de-ꙟmпърціtȣл, ші se ва копріnde ꙟntp'ꙟnsȣл de atꙟtea opĭ, de кꙟte opĭ se копріnde ȣnimea ꙟn ꙟmпърціtop; sпpe пілdъ 12 леĭ ꙟmпърціцĭ пріn 3, dъ пentpɤ кɪt 4 лeĭ. Dap dакъ ɪmпърцitopɤл ва fi кътime omoцeпъ кɤ de-ɪmпърцitɤл, кɪtɤл ва fi пɤmър шi ва аръta рапортɤл каре este ɪntpe amɪndoĭ: adiкъ de кɪte opĭ se кoпpinde ɪmпърцitopɤл ɪn de-ɪmпърцitɤл; snpe пiлdъ, 12 лei ɪmпърцiцĭ пpin 4 леĭ, daɤ̆ пentpɤ кɪt пɤmърɤл 3, каре арatъ къ 4 леĭ ɪn 12 se кoпpind de 3 opĭ. Ɪn челе ɤpmъtoape sɤnt de-ɪmпърцit se ɪnцeлeцe пɤmър, de ɤnde ɤpmeazъ къ шi ɪmпърцitopɤл шi кɪtɤл sъ fie пɤmepe.

§. 74. Ɪmпърцipea se арatъ пpin doъ пɤntɤpĭ (:) каре se пɤn ɪntpe de-ɪmпърцit шi ɪntpe ɪmпърцitop, snpe пiлdъ $a:b=c$ (a ɪmпърцit пpin b d'опоtpiвъ лɤĭ c); iap dакъ de-ɪmпърцitɤл saɤ̆ ɪmпърцitopɤл вop fi кътimĭ комплeкse, fie каре din eĭ se ɪnкide ɪn парentes, пpeкɤm $(a+b):c$ saɤ̆ $a:(b+c)$ saɤ̆ $(a+b):(c+d)$.

§. 75. Din definiцia ɪmпърцipeĭ §. 72. ɤpmeazъ къ de ва fi $a:b=c$, ва fi шi $a=bc$; saɤ̆ пpodɤктɤл din ɪmпърцitop шi din кɪt este d'опоtpiвъ кɤ de-ɪmпърцitɤл; шi din пpotiвъ de ва fi $a=bc$ ва fi шi $a:b=c$ saɤ̆ $a:c=b$.

§. 76. Фiind къ $a=a\times1$, ва fi $a:a=1$, saɤ̆ пɤmърɤл ɪmпърцit пpin sine ɪnsɤшĭ, dъ пentpɤ кɪt ɤnimea. Asemenea din ачеiaш екɤацie $a=a\times1$ ɤpmeazъ $a:1=a$ saɤ̆ пɤmърɤл ɪmпърцit пpin ɤnime, dъ пentpɤ кɪt пe sine ɪnsɤшĭ.

§. 77. De ва fi $a=b$ шi $c=d$ ва fi шi $a:c=b:d$ saɤ̆ челе d'опоtpiвъ ɪmпърцindɤse пpin d'опоtpiвъ, daɤ̆ кɪtɤpĭ d'опоtpiвъ.

§. 78. De ва fi $a>b$ ва fi шi $a:c>b:c$. Sъ пɤnem $a:c=p$ шi $b:c=q$, de ɤnde ɤpmeazъ $a=cp$, $b=cq$; de ap fi $p=q$ ap тpeбɤi sъ fie шi $cp=cq$ saɤ̆ $a=b$; saɤ̆ de ap fi $p<q$ ap тpeбɤi sъ fie шi $cp<cq$ saɤ̆ $a<b$

каре амꙟdoъ se ꙟmпpotiвesк sȣпoziціеĭ къ $a>b$; аша dap $p>q$ saȣ̆ $a:c>b:c$.

§. 79. De ва fi $a>b$ ва fi $c:a<c:b$; Sъ пȣnem $c:a=p$, $c:b=q$; аша dap $c=ap$, $c=bq$ ші $ap=bq$; dap din пpічina ʌȣĭ $a>b$ ва fi ші $aq>bq$ saȣ̆ $aq>ap$; de ачеѣа dакъ амꙟdoъ кътimeʌe se ꙟmпapt пpin a atȣнчĭ ва fi $q>p$ (§. 78.) saȣ̆ $c:b>c:a$.

§. 80. Фie $P=Af\times B$; fiind къ $AB\times f=Af\times B$ (§. 51.) ва fi ші $P=AB\times f$, ші пpin ȣpmape $P:f=AB$; аша dap dакъ din пpodȣкtȣʌ $Af\times B$ ȣn fъкътop Af se ва ꙟmпърці пpin f atȣнчĭ ші пpodȣкtȣʌ ва fi ꙟmпърціt. Sпpe пiʌdъ $42=6\times7$ ші $42:3=2\times7=14$.

§. 81. Ꙟmпърціpѣа se поаte faче екzaкtъ кꙟnd ꙟn ꙟmпърціtop нȣ ва fi нічĭ ȣn fъкътop каре съ нȣ se копpinzъ ші ꙟn de-ꙟmпърціt; ʌа ꙟntꙟmпʌapѣа ачѣasta se ʌasъ afapъ toate ʌiтepiʌe каре сꙟnt комȣne de-ꙟmпърціtȣʌȣĭ ші ꙟmпърціtopȣʌȣĭ, чеʌе ʌaʌte ʌitepe аʌе de-ꙟmпърціtȣʌȣĭ съ se пъstpeze пentpȣ кꙟt, кърора съ ʌi se пȣе ꙟnainte нȣmъpȣʌ каре ва еші, кꙟnd конfъкъtopȣʌ de-ꙟmпърціtȣʌȣĭ se ва ꙟmпърці пpin конfъкъtopȣʌ ꙟmпърціtopȣʌȣĭ.

Екzemпʌȣpĭ.

$8a:4=2a$	$9ab:3a=3b$	$15abc:3ab=5c$
$8a:4a=2$	$12abc:4b=3ac$	$35abcd:7ac=5bd$

ш ч ʌ.

§. 82. Dакъ de-ꙟmпърціtȣʌ ші ꙟmпърціtopȣʌ воp fi пȣtepĭ аʌе ачеѣаш ръdъчiĭ, кꙟtȣʌ ва fi пȣtepѣа ръdъчiнеĭ ачещіа, аʌкъpia еsпȣnent se afʌъ dакъ se ва skoate еsпȣnentȣʌ ꙟmпърціtopȣʌȣĭ din еsпȣnentȣʌ de-ꙟmпърціtȣʌȣĭ.

Sпpe пiʌdъ $a^3 : a^2=a^{3-2}=a^1=a$.

Пentpȣ къ $a^3=aaa$ ші $a^2=aa$, пpin ȣpmape:

$a^3 : a^2 = aaa : aa = a.$

Saȣ $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$.

Пentрȣ къ $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = aa = a^2$, asemenѣa ші ла. челелалte ꙟntꙟmплърі. De обще dар ва fi:

$a^m : a^n = a^{m-n}$.

§. 83. Ꙟn регȣла maĭ din sȣs se faче sȣпoziцie къ $m > n$; de ва fi $m = n$ ва da $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$; dар fiind къ $a^m : a^m = 1$ (§. 76.) ȣрmѣazъ sъ fie $a^0 = 1$.

Екzemплȣрі ла §. 82. ші §. 83.

$15a^3b^2c^5 : 3a^2b^2c^3 = 5ac^2$

$27a^7b^6c^4 : 9a^4b^2c^3 = 3a^3b^4c$

$30a^{m+r}b^m.c^5.d^3 : 5a^r b^n e^p d = 6a^m b^{m-n} c^{5-p} d^2$

§. 84. Фiind къ $\pm a \times + b = \pm ab$, ȣрmѣazъ sъ fie ші $\pm ab : +b = \pm a$. (§. 75.); аша dар кꙟnd ꙟmmȣлцitорȣл ва fi пozitiв, atȣnчĭ кꙟtȣл ва авѣа semnȣл de-ꙟmпърцitȣлȣĭ.

Фiind къ $\pm a \times - b = \mp ab$, тревȣе пе ȣрmъ sъ fie $\mp ab : -b = \pm a$ (§. 75.); аша dар кꙟnd ꙟmпърцitорȣл ва fi негаtiв, atȣnчĭ semnȣл кꙟtȣлȣĭ ва fi kontраріȣ кȣ semnȣл че'л аре de-ꙟmпърцitȣл.

§. 85. Лȣꙟndȣse ꙟn бъгаре de sѣamъ челе patрȣ ꙟntꙟmплърĭ:

$+ ab : + b = + a$

$- ab : + b = - a$

$+ ab : - b = - a$

$- ab : - b = + a$

se faче ꙟnвedерat къ кꙟtȣл ва fi пozitiв saȣ негаtiв, dȣпъ кȣm вор авѣа tot ачелѣаш semne, saȣ kontраріĭ, de-ꙟmпърцitȣл ші ꙟmпърцitорȣл.

Екzemплꙋрї.

$35a^3b^7c^6d \;:\; 7a^2b^4c^4 = 5ab^3c^2d$

$-15ab^6c^5 \;:\; 3ab^5c^4 = -5bc$

$21a^5b^3c^2 \;:\; -3a^3bc = -7a^2b^2c$

$-27a^{3m}b^{4n}c^p \;:\; -9a^{2m}b^{2n}c^p = 3a^m b^{2n}$

§. 86. Кътimea комплексъ se ꙟмпърцеще прin tр'о inкомплексъ кꙟnd fie каре термin din чea d'ꙟntꙟї se ва ꙟмпърцї прin чea dꙋпъ ꙋрmъ, шi кꙟnd кꙟtꙋрi-ле партiкꙋларе se вор stрꙟnџе ꙟntр'о sꙋmъ.

Екzemплꙋрї.

$(ab+a) : a = ab : a + a : a = b+1$

$(a^2+ab) : a = a^2 : a + ab : a = a+b.$

$(2ab-4ac+8a) : -2a = -b+2c-4$

$(15a^2b^3c - 5ab^2c^3) : 5ab^2c = 3ab - c^2$

$(27a^{m+3}b^5c^3 - 6a^m b^4c^7 + 12a^5b^6c^3) :$
$-3a^3b^3c^3 = -9a^m b^2 + 2a^{m-3}bc^4 - 4a^2b^3.$

§. 87. Dакъ de-ꙟмпърцitꙋл шi ꙟмпърцitорꙋл вор fi кътimї комплексe, sъ se пꙋе ꙟн рꙟnd amꙟndoї dꙋ-пъ пꙋтeрiле ꙋнеї nехоtърꙟte (§. 69.); sъ se ꙟмпарцъ термenꙋл чел d'ꙟntꙟї ал de-ꙟмпърцitꙋлꙋї прin чел d'ꙟntꙟї ал ꙟмпърцitорꙋлꙋї, кꙟtꙋл аflat sъ se ꙟmmꙋлцеаskъ кꙋ тоцї термenїї ꙟмпърцitорълꙋї, шi продꙋкtꙋл sъ se skazъ din de-ꙟмпърцit; dакъ se ва щерџе ꙋпꙋл прin алtꙋл ꙟмпърцiрea ва fi съвꙟршitъ.

Екzemплꙋрї.

I. $(21a^3b^2c - 35abc^3d) : (3a^2b - 5c^2d) = 7abc$

$$\begin{array}{l} 21a^3b^2c - 35abc^3d \\ -\qquad\qquad + \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

II. $(18a^{m+3}b^2cd - 12a^m bc^{n+1}d^2) : (3a^3b - 2c^n d) = 6a^m bcd.$

$$\begin{array}{l} 18a^{m+3}b^2cd - 12a^m bc^{n+1}d^2 \\ -\qquad\qquad\qquad + \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

§. 88. Іар дакъ ꙟn skъdeрea de maĭ nainte кътimiле nȣ se вор щерџе, tepmenȣл чел d'ꙟntꙟĭ ал ръmъшiцеї sъ se ꙟmпарцъ ꙟаръш прin tepmenȣл чел d'ꙟntꙟĭ ал ꙟmпърцitорȣлȣї; ачest d'аldoiлеа кꙟt sъ se ꙟmmȣлцеаskъ кȣ ꙟmпърцitорȣл ꙟntper шi продȣktȣл sъ se skazъ din ръmъшiцa d'ꙟntꙟĭ; ачеаstъ лȣкраре sъ se репeteze de atꙟtea орĭ de кꙟte орĭ se ва пȣtеа. Кꙟtȣл ꙟntper ва fi sȣma tȣtȣлор кꙟtȣрiлор партikȣларе че se вор afла ꙟntр'ачeste ꙟmпърцiрĭ че ȣрmеазъ ȣna dȣпъ алta.

Екzemплȣрĭ.

I. $(10 - 29x - 21x^2):(5+3x) = 2 - 7x$

$$\begin{array}{l}
10 + 6x \\
- \quad - \\
\hline
\quad -35x - 21x^2 \\
\quad -35x - 21x^2 \\
\quad + \qquad + \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

II. $(32u^5 - 1):(2u - 1) = 16u^4 + 8u^3 + 4u^2 + 2u + 1$

$$\begin{array}{l}
32u^5 - 16u^4 \\
- \qquad + \\
\hline
\quad 16u^4 - 1 \\
\quad 16u^4 - 8u^3 \\
\quad - \qquad + \\
\hline
\qquad 8u^3 - 1 \\
\qquad 8u^3 - 4u^2 \\
\qquad - \qquad + \\
\hline
\qquad\quad 4u^2 - 1 \\
\qquad\quad 4u^2 - 2u \\
\qquad\quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 2u - 1 \\
\qquad\qquad 2u - 1 \\
\qquad\qquad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

III. $(2x^5 - 11ax^4 + 18a^2x^3 - 14a^3x^2 - 5a^4x + 6a^5) : (x^2 - 3ax - 2a_2 =$
$2x^3 - 5ax^2 + 7a^2x - 3a^3.$

$$
\begin{array}{llllll}
2x^5 - 6ax^4 - 4a^2x^3 & & & & & \\
- \quad + \quad + & & & & & \\
\hline
& -5ax^4 + 22a^2x^3 - 14a^3x^2 & & & & \\
& -5ax^4 + 15a^2x^3 + 10a^3x^2 & & & & \\
& + \quad - \quad - & & & & \\
\hline
& & 7a^2x^3 - 24a^3x^2 - 5a^4x & & & \\
& & 7a^2x^3 - 21a^3x^2 - 14a^4x & & & \\
& & - \quad + \quad + & & & \\
\hline
& & & -3a^3x^2 + 9a^4x + 6a^5 & & \\
& & & -3a^3x^2 + 9a^4x + 6a^5 & & \\
& & & + \quad - \quad - & & \\
\hline
& & & \quad 0 & &
\end{array}
$$

§. 89. Iap dakъ ɪmпъpцipea nȣ se ва пȣtea faче екzakt, tpeбȣe sъ se oпpeaskъ лȣкpapea лa pъmъшiцa aчеꙗ ɪn kape пȣtepea чea maĭ mape a лitepi, dȣпъ ka-pe sɪnt pɪndȣiцĭ de-ɪmпъpцitȣл шi ɪmпъpцitopȣл, ва fi maĭ mikъ dekɪt aчea пȣtepe ɪn ɪmпъpцitop.

Екzemплаpĭ.

I. $(14x^3 - 25x^2 + 41x - 1) : (7x - 2) = 2x^2 - 3x + 5$

$$\begin{array}{l}
14x^3 - 4x^2 \\
- \qquad + \\
\hline
\qquad -21x^2 + 41x \\
\qquad -21x^2 + 6x \\
\qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad 35x - 1 \\
\qquad\qquad 35x - 10 \\
\qquad\qquad - \qquad + \\
\hline
\end{array}$$

9. Ръмъшіцъ.

II. $(12y^5 - 20y^4 + 22y^3 + 19y^2 - 20y + 16) : (3y^2 - 5y + 7)$
$= 4y^3 - 2y + 3$

$$\begin{array}{l}
12y^5 - 20y^4 + 28y^3 \\
- \qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad -6y^3 + 19y^2 - 20y \\
\qquad -6y^3 + 10y^2 - 14y \\
\qquad + \qquad - \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad 9y^2 - 6y + 16 \\
\qquad\qquad 9y^2 - 15y + 21 \\
\qquad\qquad - \qquad + \qquad - \\
\hline
\end{array}$$

$9y - 5$. Ръмъшіцъ

III. $(u^5+u^3-1):(u^3-u+1)=u^2+2$

$$\begin{array}{l} u^5 - u^3 + u^2 \\ - \quad + \quad - \\ \hline \quad 2u^3 - u^2 - 1 \\ \quad 2u^3 - 2u + 2 \\ \quad - \quad + \quad - \\ \hline \qquad -u^2 + 2u - 3. \end{array}$$ Ръмъшiцъ.

§. 90. Dакъ de-ꙟmпърцitꙋл ва fi inкomплексꙋ̆ шi ꙟmпърцiтoрꙋл кomплексꙋ̆, ꙟmпърцiрea нꙋ se пoa-te faче екzaкtъ лa нiчĭ o ꙟntꙟmплaре; вom пꙋteа ꙟnsъ afлa кꙟtꙋрĭ пaрtiкꙋлaре, daкъ de-ꙟmпърцitꙋл se вa пꙋteа ꙟmпърцi екzaкt кꙋ oaре кaре tермiн aл ꙟmпърцiтoрꙋлꙋĭ.

Екzemплꙋрĭ.

I. $x^5 : (x^2+a^3)=x^3.$

$$\begin{array}{l} x^5+a^3x^2 \\ - \quad - \\ \hline \quad -a^3x^2 \end{array}$$ Ръмъшiцъ.

II. $x^7 : (x^3 - ax^2 + a^3) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 - a^4.$

$$
\begin{array}{l}
x^7 - ax^6 + a^3x^4 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
\quad ax^6 - a^3x^4 \\
\quad ax^6 - a^2x^5 + a^4x^3 \\
\quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad a^2x^5 - a^3x^4 - a^4x^3 \\
\qquad a^2x^5 - a^3x^4 + a^5x^2 \\
\qquad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\quad -a^4x^3 - a^5x^2 \\
\qquad\quad -a^4x^3 + a^5x^2 - a^7 \\
\qquad\quad + \quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad -2a^5x^2 + a^7. \text{ Ръмъшіцъ.}
\end{array}
$$

§, 91. Пentpȣ a se черка ↑mпърціреа, sъ se ↑mmȣлцеaskъ ↑mпърціtopȣл прin к↑tȣ̆, ші прodȣktȣлȣĭ sъ 'i se adoaце ръmъшіца; лȣкрареа ва fi екzaktъ к↑nd sȣma ва еші d'опоtpівъ кȣ de-↑mпърціtȣл.

Пentpȣ desfaчереа нȣmеріlop ↑n fъкъtopĭ.

§. 92. Nȣmъp ↑nt↑itop saȣ̆ simплȣ este ачела каpe se поate ↑mпърці акоpat нȣmaĭ прin sine ↑nsȣшĭ, ші прin ȣnime; ачестеа s↑nt 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, шчл.

Компѫs este ачела каре se поate ↑мпърці екzакт ші прin алт nѫмър, saѫ прin maï mѫлte алте, декѫт прin sine ↑nsѫші ші прin ѫnime, de ачест feл sѫnt 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 шчл.

§. 93. Nѫмърѫл каре ↑мпърцеще акорат пе алтѫл se nѫмеще чеа maï dѫпъ ѫртъ мъsѫръ, saѫ ↑мпърцітор, ↑n sensѫл maï stрікт; ↑нкъ ші fъкътор; sпре пілdъ $27:3=9$; аша dар 3 este мъsѫра лѫї 27, пентрѫ къ 3 ↑n 27 se копрinde de 9 орї; saѫ este fъкътор, пентрѫ къ $9\times3=27$.

Фъкъторії каре sѫnt nѫмере ↑nт↑itoаре se nѫмеskѫ simпли; компѫші каре sѫnt nѫмере компѫse; ↑n Екzемплѫл de maï sѫs 3 este fъкътор simплѫ, 9 fъкътор компѫs аї nѫмърѫлѫї 27.

§. 94. Tot nѫмърѫл N, компѫs ші хотърѫт se поате desfаче ↑n fъкъторї simпли; sъ zічем къ $N=A.B.C\ldots\ldots$, dакъ fъкъторі A, B, C, ... вор fi nѫмере ↑nт↑itoаре, ↑nтрегѫл ва авеа nѫмаї пе ачеші fъкъторї; іар dакъ fъкъторії вор fi nѫмере компѫse, fieш каре dinтр↑nші se вор пѫтеа desfаче ↑n алцї fъкъторї; fie adікъ $A=a.\,a'.\,a''\ldots\ldots B=b.\,b'.\,b''\ldots\ldots C=c.\,c'.\,c''\ldots\ldots$ шчл. Dinтр'ачеаsta $N=a.\,a'.\,a''\ldots\times b.\,b'.\,b''.\ldots\times c.\,c'.\,c''\ldots$ шчл. Акѫм dакъ $a, a'\ldots\ldots b, b'\ldots\ c, c',\ldots$ вор fi nѫмере ↑nт↑itoаре, N ва fi компѫs de ачеші fъкъторї simпли; іар dакъ nѫ вор fi ↑nт↑iторї se вор пѫтеа іаръш desfаче ↑n алцї fъкъторї maï simпли, каре desfачере, dакъ ↑n чеа maï dѫпъ ѫртъ nѫ ва ажѫnџе ла sf↑ршit, nѫмърѫл N требѫе sъ fie продѫкт de fъкъторї немърцініцї maï марї декѫт ѫnimеа, ші dѫпъ ѫрмаре немърцinit, каре este ↑мпотівітор sѫпозіціеї; аша dар tot nѫмърѫл компѫs ва fi продѫкт din nѫмър хотърѫт ал fъкъторілор simпли; sпре пiлdъ $24=2.2.2.3.=2^3.3$; $27=3.3.3=3^3$; $30=2.3.5$; $360=2.2.2.3.3.5=2^3.3^2.5$.

§. 95. Фie $A=ma$, шi $B=mb$, de ѫnde $A\pm B=ma\pm mb=m(a\pm b)$. Аша dap dакъ doъ нѫмepe A шi B вор авеа фъкътор комѫн, алор sѫmъ ꙟарън шi difepeнцъ se ва пѫtea ꙟmпърцi прin ачелаш фъкътор.

§. 96. Sъ se ꙟmmѫлцеasкъ нѫmърѫл $A=ma$ прin алtѫл орї каре B; шi ва fi produкtѫл $AB=maB$; аша dap se poate ꙟmпърцi prodѫкtѫл maї мѫлтор фъкъторї прintр'ачелаш нѫmър прin каре ѫnѫл din фъкъторї se poate ꙟmпърцi.

§. 97. Nѫmърѫл zечimал, a кърѫꙟа цifpa чеа maї dѫпъ ѫpmъ spre dpeanta ва fi нѫлъ, копрinde фъкъторѫл 10; spre пildъ $750=75\times10$ каре se pe-презenteazъ прin формѫла $10m$, de ачеа dѫпъ §. 96. se poate ꙟmпърцi екzакт прin 2 шi прin 5 пentpѫ къ $10=2\times5$.

§. 98. Nѫmърѫл zечimал a кърѫꙟа чеа maї dѫпъ ѫpmъ цifpъ spre dpeanta ва fi n se pепpezanteazъ прin фор-мѫла $10m+n$. Sпре пildъ $756=750+6=75\times10+6$; аша dap ачеst нѫmър se poate ꙟmпърцi прin 2 daка n ва fi ѫna din цifpеле 2, 4, 6, 8, saѹ прin 5 de ва fi $n=5$ (§. 95.)

§. 99. Din чеа че s'a zis maї nainte tot нѫmъ-рѫл se poate ꙟmпърцi прin 5 акорat a кърѫꙟа чеа din ѫpmъ цifpъ spre dpeanta ва fi орї 0 saѹ 5. spr: n: $290:5=58$; $385:5=77$; ꙟар прin 2 se poate ꙟmпърцi екzакt нѫmеріле каре вор авеа ꙟntр'ачелаш локѹ ѫna din цifpеле 0, 2, 4, 6, 8.

§. 100. Nѫmepe кѫ soцѹ sint ачелеа каре se пot ꙟmпърці кꙋ 2 екzакt; asfeл de нꙋmере se репреzen-tɛazъ кꙋ formꙋлa $2n$, шi toate прin tрꙟnsa se fак, ꙟn локꙋл лꙋї n se пot пꙋne нꙋmeріле natꙋрале adікъ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ш ч л nemърцinit

§. 101. Nꙋmeріле fъръ soцꙋ̆ sꙟnt ачелɛa каре нꙋ se пot ꙟmпърці акорat прin 2, каре ва sъ zікъ аче-лɛa каре аꙋ̆ ꙟn локꙋл чел maї dꙋпъ ꙋрmъ despре dрɛапta ꙋna din цifреле 1, 3, 5, 7, 9. Toate ачeste нꙋmере se копрind ꙟn formꙋла $2n-1$ din каре toate se fак, dакъ ꙟn локꙋл лꙋї n se вор пꙋne нꙋmeріле natꙋрале; adікъ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ш ч л nemърцinit.

§. 102. Toate нꙋmeріле ꙟntꙟiloape, afаръ din нꙋ-mърꙋл 2, sꙟnt fъръ soцꙋ̆, пentрꙋ къ нꙋ se пot ꙟmпърці de алt нꙋmър dекꙟt прin sine ꙟnsꙋшї шi прin ꙋnime.

§. 103. Nꙋmър ꙟ m п е р е к ɛa t к ꙋ s o ц ꙋ̆ este a-чела каре, ꙟmпърцindꙋse кꙋ 2, dъ кꙟtꙋл кꙋ soцꙋ̆; asfeл sꙟnt 4, 8, 12, 16, 20 . . . $4n$. Ачeste нꙋmере ꙟаръш se пot ꙟmпърці екzакt прin 4. Ꙟ m п е р е к ɛa t f ъ р ъ s o-ц ꙋ̆, este нꙋmърꙋл ачела каре ꙟmпърцindꙋse кꙋ 2 dъ кꙟtꙋл fъръ soц, прекꙋm sꙟnt 2, 6, 10, 14, 18 . . . $4n-2$.

§. 104. Sꙋma шi difeрenцa a doъ нꙋmере кꙋ soц поate fi ꙟаръш кꙋ soцꙋ̆, dꙋпъ кꙋm se doвedeще прin §. 95.

§. 105. Фie doъ нꙋmере fъръ soцꙋ̆ $A=2n-1$ шi $B=2m-1$. Фiind къ este $A+B=2n-1+2m-1=2n+2m-2=2(n+m-1)$; шi $A-B=2n-1-2m+1=2n-2m=2(n-m)$, este ꙟnвedepat къ sꙋma шi difeрenцa лор se поate ꙟmпърці акорat прin 2; аша dар sꙋma шi difeрenцa a doъ нꙋmере fъръ soцꙋ̆, este кꙋ soцꙋ̆.

§. 106. Фie doъ нꙋmере кꙋ soцꙋ̆, $A=2n$ шi $B=2m$, прodꙋktꙋл лор ва fi $AB=2n.\ 2m=4mn$, каре ва sъ zікъ ꙟmперекɛat кꙋ soцꙋ̆ (§. 103).

§. 107. Dакъ ꙋп пꙋтър фъръ soцꙋ $A=2n-1$ se ва ꙟтmꙋлці кꙋ аλt пꙋтър фъръ soцꙋ $B=2m-1$ проdꙋкtꙋл ва fi $AB=(2n-1)(2m-1)=2(2mn-m-n)+1$; каре ва sъ zікъ фъръ soцꙋ.

§. 108. Sъ se ꙟnsemneze doъ цifpe despre dpeaпta a ле ꙋпꙋї пꙋтър zeчimaл N кꙋ літеріле a ші b; іар челе лаλte кꙋ о літеръ sinгꙋръ m; mi ва fi $N=100m+10b+a$; de ꙋnde $N:4=25m+(10b+a):4$. Аша dap пꙋтърꙋл zeчimaл se поate ꙟmпърці пріп 4 екzакt ачела a ле кърꙋіа челе maї din dpeaпta doъ цifpe se пot ꙟmпърці пріп 4. Sпре пілdъ fiind къ $36:4=9$ ші пꙋтърꙋл 7936 se ва пꙋtea ꙟmпърці пріп 4.

§. 109. Фіе a, b, c, tpeї цifpe despre dpeaпta a ꙋпꙋї пꙋтър zeчimaл N, ші $N=1000m+100c+10b+a$; de ꙋnde $N:8=125m+(100c+10b+a):8$; аша dap ачел пꙋтър se поate ꙟmпърці екzакt пріп 8 аλе кърꙋіа tpeї цifpe din dpeaпta se пot ꙟmпърці пріп 8. Sпре пілdъ 35072; ꙋnde $072:8=9$.

§. 110. Asemenea se поate аръta къ пꙋтърꙋл ачела se поate ꙟmпърці кꙋ 25 аλе кърꙋіа doъ цifpe despre dpeaпta se ꙟmпарt пріп 25, saꙋ къ ачел пꙋтър se поate ꙟmпърці пріп 125 аλе кърꙋіа tpeї цifpe dꙋпъ ꙋрmъ despre dpeaпta se пot ꙟmпърці екzакt кꙋ 125; sпре пілdъ $3950:25=158$ ші $796125:125=6369$.

§. 111. Орї каре пꙋtepe a пꙋтърꙋлꙋї 10 se поate pепрezenta пріп formꙋла $9z+1$; пentpꙋ къ:

$10=9+1$

$10^2=99+1=9.11+1=9.\Gamma+1$ sокotindꙋse $11=\Gamma$.

$10^3=999+1=9.111+1=9.\Delta+1$ . . . . . . $111=\Delta$.

$10^4=9999+1=9.1111+1=9\varepsilon+1$ . . . . $1111=\varepsilon$.

ш ч л.

аша dap de опще $10^m=9z+1$.

Фie a, b, c, d, e, ш ч л. цifpeлe din каpe нȣмъpȣл zeчimaл N este компȣs dела dpeaпta спpe stꙟnga; de ȣnde:

$N=a+b.\ 10+c.\ 10^2+d.\ 10^3+e.\ 10^4+$ ш ч л, ...

saȣ̆ нȣindȣse ꙟn локȣл пȣtepiлop esпpesiiлe aфлate:

$N=a+b(9+1)+c\ (9.\text{г}+1)+d(9\text{д}+1)+e(9\varepsilon+1)+..$

$N=9b+9\text{г}c+9\text{д}d+9\varepsilon e+.....+a+b+c+d+e+..$

$N=9(b+\text{г}c+\text{д}d+\varepsilon e+\ ......)+a+b+c+d+e+..$

sокоtindȣse $A=b+\text{г}c+\text{д}d+\varepsilon e+.....$

$B=a+b+c+d+e+\ .....$

аша dap $N=9A+B$, ȣnde лitepa B ꙟsemneazъ sȣma tȣtȣлop цifpeлop din каpe нȣмъpȣл N este компȣs. Акȣm fiind къ este $N:3=3A+B:3$ ші $N:9=A+B:9$, este ꙟmвedepat къ нȣмъpȣл ачела N se поate ꙟmпъp-ці пpin 3 ші пpin 9, ꙟn каpe sȣma цifpeлop se поate ꙟmпъpці пpin ачелеаш пȣtepe; спpe пiлdъ 354207 se поate ꙟmпъpці пpin 3 пentpȣ къ $3+5+4+2+7=21$ (se поate фаче maĭ лesne ачеastъ чepкаpe de se вop adȣ-na нȣmaĭ ачеле цifpe каpe нȣ se пot ꙟmпъpці пpin 3). Нȣмъpȣл 635490 se поate ꙟmпъpці кȣ 9 пentpȣ къ $6+3+5+4+9=27$.

§. 112. Пȣtepiле нȣмъpȣлȣĭ 10 se пot pedȣче ꙟаpъш ла фopmȣла $11z\pm1$; пentpȣ къ:

$10=11-1.$

$10^2=(11-1).\ 10=11.\ 10-10=11.\ 10-11+1=11.\ 9+1$
$=11\text{г}+1$

$10^3=(11.9+1).\ 10=11.\ 90+10=11.\ 90+11-1=11.\ 91-1$
$=11\text{д}-1$

$10^4=(11.91-1).\ 10=11.\ 910-10=11.\ 910-11+1$
$=11.\ 909+1=11\varepsilon+1$

ш ч л. sокоtindȣse $\text{г}=9$; $\text{д}=91$; $\varepsilon=909$ ш ч л.

аша dap de обще ва fi $10^m = 11z \pm 1$, ꙟн каре формъ se ціне ꙟн seamъ semnꙋл позітів кꙟнd есnꙋnentꙋл m este кꙋ soцꙋ, іар негатів кꙟнd este фъръ soцꙋ. Sъ se пꙋе акꙋm ꙟн лоꙗꙋл пꙋтерілор еспресііле афлате

$N = a + b.\ 10 + c.\ 10^2 + d.\ 10^3 + e.\ 10^4 \pm$ шчл....,

ші ва fi:

$N = a + b\,(11 - 1) + c\,(11\Gamma + 1) + d\,(11\Delta - 1) +$

$e(11\varepsilon + 1) +$ шчл......

$N = 11(b + \Gamma c + \Delta d + e\varepsilon + \ldots.) + a - b + c - d + e -$

шчл.....

Фіе $A = b + \Gamma c + \Delta d + \varepsilon e \ldots..$

$B = a + c + e + \ldots..$

$C = b + d + \ldots..$

de ꙋnde B este sꙋma ціфрелор ꙟн локꙋріле фъръ soцꙋ, ші C sꙋma ціфрелор ꙟн локꙋріле кꙋ soцꙋ але пꙋмъ-рꙋлꙋї zечімал N; dꙋпъ ачеаста fie $N = 11A + B - C$; de ꙋnde $N : 11 = A + (B - C) : 11$, каре ва fi ꙋн пꙋмър ꙟн-тpeг кꙟнd $B - C = 0$, saꙋ кꙟнd ачеастъ діференцъ se поате ꙟмпърці прін 11 екzакт; аша dap ꙋн пꙋмър se поате ꙟмпърці прін 11 dакъ sꙋмеле ціфрелор лꙋї, ꙟн локꙋріле кꙋ soцꙋ, ші ꙟн челе фъръ soц, орї вор fi d'опотрівъ, saꙋ алор діференцъ ва fi 11, saꙋ ꙟм-мꙋлціtъ кꙋ 11. Sпре пілdъ пꙋмърꙋл 132 se поате ꙟмпърці прін 11 пентрꙋ къ $1 + 2 = 3$; asemenea ші 5016, пентрꙋ къ $1 + 5 = 6 + 0$; прекꙋм ꙟнкъ ші 2090, пентрꙋ къ $2 + 9 - (0 + 0) = 11$. ꙟн чеа маї dꙋпъ ꙋрмъ ші 5270958, пентрꙋ къ $8 + 9 + 7 + 5 - (5 + 0 + 2) = 22$.

§. 113. Афаръ dінтр'ачесте пꙋціне ꙟнтꙟмплърї, ꙟн каре dꙋпъ semnele че s'аꙋ аръtat se кꙋноаше dакъ пꙋмърꙋл N se поате ꙟмпърці прін пꙋмеріле ꙟнтꙟітоа-ре 2, 3, 5 ші 11, пꙋмаї прін черкаре se поате афла кꙋ каре алте пꙋмере ꙟнтꙟітоаре se поате ꙟмпърці ачелаш нȣmър; пentрȣ каре sъ se ꙟmпарцъ нȣmърȣл N кȣ нȣmеріле ꙟntꙟitoape, ꙟnчепꙟnd пе рꙟnd dела челе maї mічї spre челе maї mapї, ші fie a нȣmърȣл ꙟntꙟitop simплȣ прin каре se поate faче ачєastъ ꙟmпърціре фъръ ръmъшіцъ; sъ se sokotєaskъ $N:a=A$. Кꙟtȣл A ва fi продȣкtȣл челор лалці фъкъtopї simплі, din каре N este комппȣs. Ꙟntр'ачest кіп sъ se кaȣte чел maї mік нȣmър simплȣ, прin каре A se поate ꙟmпърці; dap ла ачєastъ черкаре sъ se лase afapъ toate нȣmеріле simпле каре вор fi maї mічї декꙟt нȣmърȣл a; пentрȣ къ dакъ A se поate ꙟmпърці прinтр'ачestєa, se поate ꙟmпърці ші нȣmърȣл N; dap fiind къ N поate sъ копрinzъ de mȣлte орї пе a, черкарєa ꙟmпърціpі нȣmърȣлȣї A требȣе sъ se ꙟnчєапъ прin нȣmърȣл simплȣ a; dакъ прinтр'ачєasta ꙟmпърціpєa нȣ se поate faче акорat, вom трече ла maї mapї нȣmере simпле; sъ zічem къ ꙟntр'ачestȣ кіп s'a гъsit.

$$N : a = A.$$
$$A : b = B.$$
$$B : c = C.$$
$$C : d = D.$$

de ȣnde a, b, c, d, ші чел dȣпъ ȣрmъ кꙟt D sꙟnt нȣmере ꙟntꙟitoape, ші ва fi, mергꙟnd ꙟn напої $C=dD$; $B=cC=cdD$; $A=bB$ $bcdD$; $N=aA=abcdD$; ші аша нȣmърȣл N ва fi dекомпȣs ꙟn фъкъtopiї лȣї simплі a, b, c, d, D; dакъ ꙟntр'ачєastъ операціе se ва гъsі къ, нȣmърȣл N нȣ se поate ꙟmпърці прin вре ȣn нȣmър maї mік декꙟt ел, atȣnчї нȣmърȣл N ва fi simплȣ. Екzemплȣ: Sъ se desfakъ нȣmърȣл 28511483 ꙟn фъкъtopiї лȣї чеї simплі; dȣпъ (§. 113.) ачest нȣmър se поate ꙟmпърці кȣ 11; adікъ $28511483:11=2591953\,(A)$.

Фiind къ A нȣ se maĭ поate ѫmпърці кȣ 11 съ чер-кът ѫmпърцірѣa лȣĭ прin 7, ші ва fi $A:7=370279$ (B), съ se черче ꙗръш ѫmпърцірѣa кѫтȣлȣĭ B прin 7, каре ва da $B:7=52897$ (C); dap C нȣ se maĭ поate ѫmпърці прin 7; аша dap съ se черче ѫmпърцірѣa прin 13 каре ва da $C:13=4069$; dȣпъ ачѣasta $4069:13=313$; ѫn чѣa dȣпъ ȣрmъ 313 нȣ se поate ѫmпърці акорat прin-tр'алt нȣmър maĭ mік dекѫt ел; ші de ачѣea este ѫn-тѫitор; аша dap fъкъtopiĭ simплĭ aĭ нȣmърȣлȣĭ про-пȣs sѫnt чеĭ ȣрmъtopĭ: 7, 7, 11, 13, 13 ші 313, саȣ: $2851483=7^2 . 11 . 13^2 . 313$.

Asemenѣa se гъseще:

$$126 = 2 . 3^2 . 7.$$
$$336 = 2^4 . 3 . 7.$$
$$360 = 2^3 . 3^2 . 5.$$
$$420 = 2^2 . 3 . 5 . 7.$$
$$462 = 2 . 3 . 7 . 11.$$
$$2940 = 2^2 . 3 . 5 . 7^2.$$
$$16170 = 2 . 3 . 5 . 7^2 . 11.$$

шчл.

§. 114. Фiind кȣnoskȣte нȣmеріле ѫntѫitoape, maĭ mічĭ dекѫt нȣmърȣл ѫntѫitop a, se пot гъsi ѫntѫitopiĭ чеĭ maĭ mapĭ dекѫt ачest a, ѫnsъ каре съ нȣ ковѫрша-skъ нȣmърȣл aa; къчĭ opĭ каре нȣmър N ѫntpe a ші aa, че нȣ se ва пȣtѣa ѫmпърці прin алt нȣmър ѫntѫitop maĭ mік dекѫt a ва fi ѫntѫitop; каре de se ва tъгъdȣi, tребȣе ка N съ se поатъ ѫmпърці прin вре ȣn нȣmър ѫntѫitop m maĭ mape dекѫt a; fie adікъ $N:m=n$, прin ȣрmаре $N=mn$; dap fiind къ $m>a$, ва fi $N:m>N:a$, (§. 79.), саȣ $n<N:a$; ші fiind къ $N<a^2$ ва fi $N:a<a$ (§. 78.), de ȣnde $n<a$ (§. 8.), dap fiind къ este $N=mn$ ва fi $N:n=m$; аша dap de ва fi n нȣmър ѫntѫi-top саȣ комnȣs, ѫn amѫndoъ ѫntѫmплъріле N s'ap пȣ-

tꙋa ꙟmпърці прintр'ꙋn нꙋmър ꙟntѫitор maĭ mik dekѫt *a* каре este ꙟmпротiва sꙋпозiціeĭ.

§. 115. Dintр'ачеasta ꙋрmeazъ, dакъ, къꙋtѫndꙋ-se фъкъторii simплi, нꙋmърꙋл пропꙋs se ꙟmпарte пе рѫnd кꙋ нꙋmере ꙟntѫitoape, шi съ ꙗsъ ꙋn кѫt каре este maĭ mik dekѫt ꙟmпърціtорꙋл, фъръ а da вре ꙋna din ꙟmпърціpiле пречedente ꙋn кѫt екzакt, ачеasta ва fi ꙋn semnꙋ̆ къ нꙋmърꙋл ачела ва fi ꙟntѫitор. Sпре пiлdъ (§. 113.) нꙋmърꙋл 313 нꙋ se поate ꙟmпърці прin алt нꙋmър simплꙋ maĭ mikꙋ̆ dekѫt 13 каре se apatъ din калкꙋлꙋл de maĭ nainte; фъкѫndꙋse ꙟmпърціpiле прin нꙋmepiле ꙟntѫitoape че ꙋрmeazъ se ва гъsi.

$313 : 17 = 18 + 7 : 17.$

$313 : 19 = 16 + 9 : 19.$ Фiind къ ачest кѫt este maĭ mik dekѫt ꙟmпърціtорꙋл, este ꙟnвedepat къ нꙋmърꙋл 313 este нꙋmър simплꙋ, пentрꙋ къ $19 \times 19 = 361$; fiind ꙟnsъ къ 313 se афлъ ꙟntpe 19 шi 19×19 нꙋ se поate ꙟmпърці нiчĭ прin нꙋmърꙋл ꙟntѫitор maĭ mik dekѫt 19; аша dар тревꙋе ка шi ачest нꙋmър съ fie ꙟntѫitор (§. 114).

Алt екzemплꙋ. 1427 нꙋ se поate ꙟmпърці прin алt нꙋmър ꙟntѫitор maĭ mik dekѫt 41, шi fiind къ este $1427 : 41 = 34 + 33 : 41$; se вede къ шi ачest нꙋmър este simплꙋ, шi аша шi челе лалte.

§. 116. Фъкъторiĭ simплĭ аĭ кътimелор нexotъpѫte шi некомплекse sѫnt кiар лiтеpiле din каре ачеste кътimĭ sѫnt компꙋse; конфъкъторiĭ кꙋ каре ачеste лiтере sѫnt ꙟnsoціte se desfак кꙋ кiпꙋл че s'а аpъtat ꙟn §. 113. sпре пiлdъ $30a^3b^2c = 2.\ 3.\ 5.\ a.\ a.\ a.\ b.\ b.\ c.$

§. 117. Desfачерea кътimiлор комплекse este maĭ аневое, шi desпре ачеasta нiчĭ se пot da регꙋле џeнерале; ꙟntѫmплъpiле челе maĭ лесne sѫnt челе ꙋрmътoape:

1) Кꙟnd toцĭ termeniĭ вор авеа ꙋn ꙟmпърцitор ко-
мꙋn, ꙋn фъкътор ва fi ачest ꙟmпърцitор, ꙗр ал-
tꙋл sꙋma кꙟtꙋрiлор партiкꙋларе, каре еse dакъ fi-
еш-каре termin se ꙟmпарte прintр'ачest фъкътор
комꙋn.

Екzемплꙋрĭ.

I. $ab+ac-ad=a(b+c-d)$

II. $2aa+6ab-4a=2a(a+3b-2)$

III. $9a^3-12a^2+3a=3a(3a^2-4a+1)$

IV. $5a^3b^2-20ab^4=5ab^2(a^2-4b^2)$

2) Кꙟnd ꙟn локꙋл ꙋнеĭ лiterĭ se поate пꙋне прецꙋл
еĭ, каре редꙋче кътimea комплексъ ꙟn nimik, sꙋma
dintр'ачеastъ лiteръ шi din прецꙋл пꙋs ꙟn локꙋл
челiĭ лаlte, кꙋ semnꙋл skimбat, ва fi ꙋn фъкътор;
челълалt se гъсеще, dакъ кꙟtimea комплексъ se ва
ꙟmпърцi прin фъкторꙋл кꙋnoskꙋt. Sпре пiлdъ ꙟn
Екzemплꙋл ал III-леа $3a^2-4a+1$ se фаче $=0$, dакъ
se ва sокоti $a=1$; аша dар ꙋn фъкътор ва fi $a-1$
шi челълалt $(3a^2-4a+1):(a-1)=3a-1$. Asemе-
неа se гъсеще $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$.

§. 118. Фiind къ ꙟn Алцебръ se ꙟntребꙋinцеazъ adesеа продꙋкtеле ꙋрmътоаре, требꙋе sъ se ꙗ бine aminte.

I. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ каре ва sъ zikъ sꙋma adoъ нꙋмере ꙟmmꙋлцitъ кꙋ diференца лор este d'опоtрiвъ кꙋ diференца пътрателор ачелораш нꙋмере.

II $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; adiкъ пътратꙋл ꙋнꙋĭ бinom este d'опоtрiвъ кꙋ sꙋma пътрателор амꙟndꙋрора terminiлор шi а продꙋкtꙋлꙋĭ ꙟndoit ал ачелораш нꙋмере; амꙟndoъ ачеste екꙋацiĭ se пot dоведi леs-не прin ꙟmmꙋлцiреа ꙟn фаптъ а фъкторiлор; аша dар ꙟn Екzemплꙋл ал IV-леа §. 117 ва fi $a^2-4b^2=$

VI.

$(a+2b)\times(a-2b)$ пеntрꙋ ачеаsta ва fi $9x^2+6x+1$ $=(3x+1)\times(3x+1)$ ші $25-10y+y^2=(5-y)\ (5-y)$.

Пеntрꙋ ꙟmпърцірі komпꙋse.

§. 119. Asemenea se поate ꙟmпърці екzакt ші пꙋmърꙋл komпꙋs, прin продꙋktеле а doĭ, tpeĭ saꙋ maĭ mꙋлtop фъкъtopĭ aĭ лꙋĭ simплі; fie *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, фъкъtopiĭ simплі aĭ пꙋmърꙋлꙋĭ *N*; adiкъ $N=abcdef$... ші ва fi ꙗрьш

$N:ab=cdef.$	$N:abc=def.$	$N:abcd=ef.$	шчл.
$N:ac=bdef.$	$N:abd=cef.$	$N:abcf=de.$	
$N:ad=bcef.$	$N:abe=cdf.$	$N:abcf=de.$	
шчл.	шчл.	шчл.	

Nꙋmеріле komпꙋse *ab*, *ac*, *ad*, *abc*, шчл., каре ꙟm-парt акopat пꙋmърꙋл *N*, se пꙋmeskꙋ ꙟmпърцitopĭ kom-пꙋшĭ aĭ ачелꙋĭ пꙋmър. Tot пꙋmърꙋл komпꙋs аре atꙟ-цеа ꙟmпърцitopĭ komꙋnĭ, кꙟцĭ din фъкъtopiĭ лꙋĭ sꙟnt binĭ, tepnĭ, кfatepnĭ шчл (кꙋ doъ літере, кꙋ tpeĭ, кꙋ patpꙋ шчл); кꙋm ꙟnsъ se fopmeазъ кꙋ ꙟnлesnipe ꙟmпърцitopiĭ komꙋnĭ, se ва аръta прin Екzemплꙋ.

§. 120. Sъ se каꙋte тоцĭ ꙟmпърцitopiĭ komпꙋшĭ aĭ пꙋmърꙋлꙋĭ 420. Ачest пꙋmър desфъкꙋt ꙟn фъкъtopĭ simплі, dъ $420=2^2.\ 3.\ 5.\ 7.$ Фъкъtopiĭ afлaцĭ sъ se ашеze ꙟntp'о колоапъ ꙟпчепꙟnd dела чеĭ maĭ mapĭ, прекꙋm se apatъ ꙟn modeлꙋл ꙋpmътop.

7.	
5.	35.
3.	21, 15, 105,
2.	14, 10, 70, 6, 42, 30, 210.
2.	4, 28, 20, 140, 12, 84, 60, 420.

Чел maĭ mape sъ se ꙟmmꙋлцеаskъ кꙋ чел maĭ mik de алъtꙋpĭ 5, ші продꙋktꙋл 35 sъ se ꙟnsemneze dea dpeапр ta фъкъtopꙋлꙋĭ 5; пе ꙋpmъ прin ал tpeiлea фъкъtosimплȣ 3 сь se ɨmmȣлцеаskъ тоці чеĭ maĭ din nainte, atɨt чеĭ simплi 7 ші 5, кɨt ші чел компȣs 35, ші продȣктеле 21, 15, 105 съ se скріе ɨn дреаnta фъкъторȣлȣĭ 3. Ȣn asemenea калкȣл съ se репетеze пентрȣ fieш каре din фъкъторіĭ simплĭ ȣрmъторĭ, ші дакъ se афлъ ɨntpe eĭ doĭ saȣ maĭ мȣлцĭ d'опоtрівъ, съ se ɨmмȣлцеаскъ seріа de maĭ nainte nȣmaĭ прінтр'ȣnȣ din ȣрmъторіĭ фъкъторĭ d'опоtрівъ, прекȣm ɨn Екzемплȣл de maĭ sȣs, ɨn каре nȣmaĭ фъкъторȣл 2 s'а ɨmmȣлціt кȣ а патра seріе de maĭ nainte 2, 14, 10, 70 ші ч. л., пентрȣ къ продȣктеле лȣĭ кȣ челе лалте seріĭ se копрінд ɨntр'а патра.

§. 121. Asemenea se гъseskȣ тоці ɨmпърціtоріĭ кътimілор nexotърɨte. Спре пілдъ: Фіind къ este $6a^2b = 2.\ 3.\ a,\ a,\ b$, термеnіĭ ɨmпърціtорĭ аĭ ачестȣіа вор fi:

a	
a	a^2
b	$ab,\ a^2b.$
3	$3a,\ 2a^2,\ 3b,\ 3ab,\ 3a^2b.$
2	$2a,\ 2a^2,\ 2b,\ 2ab,\ 2a^2b,\ 6,\ 6a,\ 6a^2,\ 6b,\ 6ab,\ 6a^2b.$

Алт Екzемплȣ: Фіind къ $2a\,(b^2-x^2) = 2a\,(b+x)\,(b-x)$, ачеаstъ кътіme s'ар пȣтеа ɨmпърці прін ɨmпърціtоріĭ ȣрmъторĭ.

$b+x$	
$b-x$	b^2-x^2
a	$a(b+x),\ a(b-x),\ a\,(b^2-x^2)$
2	$2(b+x),\ 2(b-x),\ 2\,(b^2-x^2),\ 2a,\ 2a\,(b+x),$ $2a(b-x),\ 2a(b^2-x^2)$

§. 122. Мъsȣра комȣnъ, saȣ ші ɨmпърціtорȣл, saȣ фъкъторȣл adoъ saȣ maĭ мȣлтор nȣmepe, se zіче ачел nȣмър прін каре орĭ че nȣмър din челе d'ɨntɨĭ se поate ↑mпърцi екzакt. Sпpe пiлdъ 5 esle mъsȣpa комȣпъ a пȣmepiлop 15 шi 20. Тоцї пȣmepiї ↑пtpeцї аȣ ȣпimea пепtpȣ mъsȣpa комȣпъ, aiчї ↑пsъ пȣmaї ачеꙗ se ↑пцелег a fi asfeл de ↑mпърцitopї каpiї se deosiвeskȣ de ȣnime. Maї mȣлte пȣmepe пot авea ꙗаpъш maї mȣлцї комȣпї ↑mпърцitopї, din каpe чел maї mape se пȣmeщe чea maї mape mъsȣpъ комȣпъ a ачелораш пȣmepe.

§. 123. Nȣmepiлe каpe afаpъ de ȣnime п'аȣ алt комȣп ↑mпърцitop se пȣmeskȣ пȣmepe ↑пt↑itoape ↑пtpe еле, sпpe пiлdъ 16 шi 21; saȣ шi $3ab$ шi $2cd$ шчл.

§. 124. Mъsȣpa комȣпъ чea maї mape a maї mȣлtop пȣmepe se гъseщe, dакъ fieш каpe dintp'aчestea se ва desfaче ↑п fъкъtopї simплi, шi dintp'aчeщia sъ se desпapцъ ачеꙗ каpe s↑пt комȣпї ла toate пȣmepiлe, пpodȣktȣл лоp ва da mъsȣpa комȣпъ чеpȣtъ.

Екzemплȣpї.

I. Фiind къ este $420=2^2 . 3 . 5 . 7$ шi $360=2^3 . 3^2 . 5$, чел maї mape ↑mпърцitop ал aчestop doъ пȣmepe ва fi $2^2 . 3 . 5=60$. Чеї лалцї maї miчї se пot afлa dакъ fъкъtopiї чеї mapї se вop комвiпa.

5	
3	15
2	10, 6, 30
2	4, 20, 12, 60

аша dap пȣmepiлe 420 шi 360 amb↑ndoъ se пot ↑mпърцi пpin 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, шi 60. Asemenea se поate ↑mпърцi шi чел maї mape ↑mпърцitop 60 пpin fieш каpe din чеї maї miчї.

II. Sъ se кaȣte чeл maĭ mape ꙟmпърціtop komȣn a treĭ nȣmepe 420, 990 шi 1470. Фiind къ este $420=2^2. 3. 5. 7$, $990=2. 3^2. 5. 11$ шi $1470=2. 3. 5. 7^2$. Мъсȣра чea maĭ mape къȣtatъ ва fi $2. 3. 5=30$; челе лaлte maĭ miчĭ sꙟnt 2, 3, 5, 6, 10, 15.

III. Sъ se кaȣte ꙟmпърціtopiĭ komȣnĭ aĭ teminiлop $14a^2bd$ шi $10ab^2de$. Фiind къ $14a^2bd=2. 7. a^2. b. d$; шi $10ab^2de=2. 5. a. b^2. d. e$, чeл maĭ mape ва fi $2. a. b. d=2abd$; чeĭ лaлціĭ sꙟnt:

a	,
b	ab,
d	ad, bd, abd.
2	$2a$, $2b$, $1ab$, $2d$, $2ad$, $2bd$;

IV. Asemenea se гъseще къ $2a(b+x)$ este чeл maĭ mape komȣn ꙟmпърціtop ал къtimiлop $4ab(b^2-x^2) = 2^2. a. b. (b+x)(b-x)$ шi $6a^2(b+x)^2 = 2. 3. a^2 (b+x)(b+x)$; чeĭ лaлціĭ sꙟnt: 2, a, $b+x$, $2a$, $2(b+x)$ шi $a(b+x)$.

V. Nȣmepiлe $429=3. 11. 13$ шi $490=2. 5. 7^2$ sꙟnt ꙟntpe еле ꙟntꙟitoape пentpȣ къ nȣ копpind niчĭ ȣn komȣn fъктop; aчest feл sꙟnt шi къtimiлe $7a^2bc$ шi $5de^2f$.

VI. Dакъ пpin ȣnȣ din nȣmepiлe date, чeĭ лaлціĭ тоціĭ se пot ꙟmпърці eкzaкt, aчeлa ва fi чea maĭ mape мъсȣръ komȣnъ. Sпpe пiлdъ nȣmepiлe 6, 12, 18, 30 aȣ dpeпt чea maĭ mape komȣnъ мъсȣръ пe 6; aлtȣ maĭ mape nȣ se пoate, пentpȣ къ 6 nȣ se пoate ꙟmпърці aкopat пpin niчĭ ȣn nȣмър maĭ mape декꙟt aчesta.

§. 25. Dintp'aчeastъ фopmaціe se apatъ челе maĭ mapĭ komȣne мъсȣpĭ aлe mȣлtop nȣmepe, шi къ aчeasta se пoate ꙟmпърці пpin тоціĭ чeĭ лaлціĭ komȣnĭ ꙟmпърціtopĭ aĭ aчeлopaш nȣmepe, кape se пot do edi maĭ de обще asfeл:

Фіе m тъсура комуnъ чеа маї маї маре а nу- мерілор A, B, C, шчл. de унde $A=ma$, $B=mb$, $C=mc$, шчл, sокотіndуse a, b, c шчл nумере ↑n- t↑itoаре ↑ntре еле. Акум de se вор nутеа ші A, B, C, ... шчл ↑mпърці екzакт прін n требуе ка ші n sъ fie fъкътор луї m; къчі nумаї ↑n треі кі- nурї A, B, C шчл se not ↑mпърці прін n: ↑nt↑ю к↑nd n ва fi fъкътор луї m; аldoілеа, к↑nd n ва fi fъкътор кумуn ал тутулор nумерілор a, b, c шчл; алтреілеа, к↑nd nумърул n ва fi продукт а доï fъкъ- торï p ші q saў $n=pq$ ші к↑nd m se ва nутеа ↑mпърці прін p ші deodatъ ші a, b, c прін q; dар челе доъ каzурï dупъ урmъ s↑nt ↑nпротiва sуnоziцiеï че s'а fъ- кут, къ a, b, c шчл s↑nt nумере ↑nt↑itoаре ↑ntре еле; аша dар требуе ка dупъ каzул d'↑nt↑ї m sъ se поатъ ↑mпърці прін n.

§. 126. Este ші алт metod de а se гъsi чел маï маре комуn ↑mпърцitор ал маï мултор nумере, fъръ а face требуiнцъ sъ se desfакъ nумеріле ↑n fъкъто- ріï лор чеï simnлі. Фіе $A>B$ ші каутъ-se чел маї ма- ре ↑mпърцitор ал ачестор nумере.

I. ↑mпърцеаskъ-se A прін B; dакъ ачеаstъ ↑mпърці- se ва face екzактъ ↑nк↑t sъ fie $A:B=a$, saў $A=aB$, B ва fi чел маї маре комуn ↑mпърцitор ал ам↑n- dурора nумерілор; пеntру къ B nу se поате ↑m- пърці екzакт de nічї уn алт nумър маї маре dек↑t ел ↑nsушї.

II. Dакъ ачеаstъ d'↑nt↑ї ↑mпърцiре nу se поате face екzактъ ші ръm↑nе оаре каре ръmъшiцъ C, adiкъ: dакъ ва fi $A=aB+C$, sъ se ↑mпарцъ іаръш B прін C; акум dакъ ачеаstъ ↑mпърцiре se поате sъвърші акорат, adiкъ dакъ ва fi $B=bc$, атуnчї C

ва fi чел maĭ mape ↑mпърцitop ал nѕmepiлop A шi B. Пentpѕ къ, dakъ B шi aB se noate ↑mпърцi npin C (§. 96) se ва пѕtєa шi $A=aB+C$ ↑mпърцi npintp'ачелаш nѕmър (§. 95); аша dap ва fi C ↑mпърцitopѕл komѕn ал nѕmepiлop A шi B; ↑nkъ ва fi шi чел maĭ mape; къчi sъ ziчem къ este алt ↑mпърцitop asemenєa maĭ mape n; fiind къ este $A=aB+C$ ва fi, skъz↑ndѕse dintp'o napte шi dintp'алta a ekѕaцii kьtimєa aB, шi $A-aB=C$, fiind dap къ, dѕпъ inotезъ, A шi aB se not ↑mпърцi npin n, алop difepenцъ C ꙗръш s'ap пѕtєa ↑mпърцi ekzakt npin ачелаш nѕmър (§. 95); kape ↑nsъ este aбsѕpd, пentpѕ къ $n>C$; аша dap C este чел maĭ mape komѕn ↑mпърцitop ал nѕmepiлop A шi B.

III. Dap dakъ шi ↑ntp'ачєastъ лалtъ ↑mпърцipe ва ръm↑nєa o ръmъшiцъ D, saѕ dakъ ва fi $B=bC+D$; ↑mпърцєaskъ-se C npin D, kape ↑mпърцipe de se ва съвършi akopat, ва fi D чел maĭ mape komѕn ↑mпърцitop ал nѕmepiлop A шi B; пentpѕ къ пѕt↑ndѕse ↑mпърцi C npin D, se ва пѕtєa шi $B=bc+D$; anoĭ шi $A=aB+C$ se ва пѕtєa ↑mпърцi npintp'ачелаш nѕmър (§. 95); аша dap ва fi D ↑mпърцitop komѕn ал nѕmepiлop A шi B, шi ↑nkъ чел maĭ mape; пentpѕ къ, dakъ ap fi алtѕл maĭ mape n, fiind $A-aB=C$, ачesta ap fi ↑mпърцitop шi лѕĭ C, шi fiind $B-bC=D$, ачела ap fi ↑mпърцitop шi лѕĭ D (§. 95); dap ачєasta este aбsѕpdъ пentpѕ къ $n>D$.

IV. Аша dap se гъseщe чел maĭ mape komѕn ↑mпърцitop adoъ nѕmepe A шi B, k↑nd чел maĭ mape A se ва ↑mпърцi npin чел maĭ mik B; npin ръmъшiцa C a ачещiĭ d'↑nt↑ĭ ↑mпърцipĭ, de ва ръm↑nєa вре ȣна, se ва ꙟмпърці antecedentȣл ꙟмпърцitop *B*; прin ръмъшіца *D* a ꙟмпърцірei d'ал doiлеа se ва ꙟмпърці ꙟмпърцitopȣл прeчedent *C*, каре ꙟмпърцipe se ва ȣрma пꙟнъ ла ачеа ȣnde se ва sъвꙟрші екzакт (fъръ ръмъшіцъ); atȣnчi ꙟмпърцitopȣл dела ачеа dȣпъ ȣpmъ ꙟмпърцipe, ва fi чел maï mape комȣn ꙟмпърцitop ал нȣmepiлop *A* ші *B*.

Екzemплѫрі.

I. 160 ші 32 аȣ dpent чеа maï mape мъsȣpъ 32. пentpȣ къ $160:32=5$.

II. Чел maï mape комȣn ꙟмпърцitop ал нȣmepiлop 1260 ші 360 este 180; пentpȣ къ:

$$\begin{array}{r|r|l} 360 & 1260 & 3 \\ \hline & 180 & 360 \mid 2 \\ & & 0 \end{array}$$

III. Нȣmepiле 1470 ші 990 аȣ dpent чел maï mape комȣn ꙟмпърцitop 30; adeкъ:

$$\begin{array}{r|r|l} 990 & 1470 & 1 \\ \hline & 480 & 990 \mid 2 \\ & & 30 \quad 480 \mid 16 \\ & & \quad 0 \end{array}$$

§. 127. Daкъ ꙟn чеа maï dȣпъ ȣpmъ ꙟмпърцipe ва fi ȣnimea ꙟмпърцitop, amꙟndoъ ачeste нȣmepe тpeбȣe sъ fie ꙟnтꙟitoape ꙟntpe еле, пentpȣ къ n'аȣ алt комȣn ꙟмпърцitop dekꙟt ȣnimea; asfел sꙟnt: 546 ші 935.

```
546|935|1
    389|546|2
        157|389|2
             75|157|2
                  7|75|10
                     5|7|1
                       2|5|2
                         1|2|2
                           0
```

546 = 1. 2. 3. 7. 13.
935 = 1. 5. 11. 17.

§. 128. Чел маї маре комȣн ꙟмпърцitop a треї нȣмере A, B, C se гъseще ꙟн кiпȣл ȣрмътор:

Sъ se кaȣte чел маї маре комȣн ꙟмпърцitop H ꙟntpe doъ нȣмере A шi B; printp'aчesta opї къ C se noate ꙟмпърцi акорат, saȣ нȣ. Ꙟн казȣл d'ꙟntiї H ва fi чел маї маре комȣн ꙟмпърцitop ал кътор треле нȣмере A, B, C; Фiind къ de ap fi алтȣ маї маре h, printp'aчела s'ap пȣtea ꙟмпърцi шi H екзакт (§. 125.), пентрȣ къ H este чел маї маре комȣн ꙟмпърцitop ал нȣмерiлор A шi B; aчeasta ꙟнсъ este абсȣрdъ, пентрȣ къ $h>H$. Ꙟн чеълалт каз съ se гъseaскъ чел маї маре комȣн ꙟмпърцitop ꙟntpe H шi C, каре fie K. Акȣм fiind къ H se noate ꙟмпърцi npin K, se noate шi A, B ꙟмпърцi npin K (§. 96.) de aчeea K ва fi ꙟмпърцitopȣл комȣн ал нȣмерiлор A, B шi C, шi ꙟнкъ чел маї маре; пентрȣ къ de ap fi алтȣл маї маре k, printp'aчела s'ap пȣtea ꙟмпърцi шi H, чел маї маре комȣн ꙟмпърцitop ал нȣмерiлор A шi B (§. 125.), аша dap шi K ap fi чел маї маре комȣн ꙟмпърцitop ꙟntpe нȣмерiле A шi C (§. 125.); dap aчeasta este ꙟмпротiва sȣпозiцieї, пентрȣ къ $k>K$.

Екzemплȣрі: I. 420, 990, 1470 аȣ dрепt чѣа маре комȣнъ мъsȣръ 30; пеntрȣ къ 420 ші 990 аȣ dрепt чѣа маї маре комȣнъ мъsȣръ 30; dар 1470:30=49; аша dар шчл.

II. Чѣа маї маре комȣнъ мъsȣръ а нȣмерілор 210, 770, 1365 este 35; каре se face ꙟnвеdерат din калкȣлȣл ȣрмътор:

210|770|3
  140|210|1
      70|140|2
          0

70|1365|19
     35|70|2
         0

Asemenѣа se поате гъsі чел маї маре комȣн ꙟмпърціtор ші а паtрȣ saȣ маї мȣлte нȣмере.

§. 129. Metodȣл арътаt ꙟn §. 126. se поате ꙟntревȣinца кꙟnd тревȣе sъ se гъsѣаskъ чел маї маре комȣн ꙟмпърціtор ал кътіmілор комплексe, акърора desfaчере ꙟn фъкъторії чеї simплі чере о маї маре osteнѣалъ.

I. Sъ se каȣte чел маї маре комȣн ꙟмпърціtор ал кътіmілор $21x^2-bx-10b^2$ ші $63x^2-66bx+15b^2$. фъкꙟndȣse ꙟмпърціреа se ва гъsі;

$$(63x^2-66bx+15b^2):(21x^2-bx-10b^2)=3$$

$$63x^2-\;\;3bx-30b^2$$

$$-\qquad+\qquad+$$

$$-63bx+45b^2=-9b\,(7x5b)$$

лепъdꙟndȣse фъкъторȣл $-9b$ sъ se ꙟмпарцъ ꙟмпърціtорȣл d'ꙟntꙟї прin челалалt фъкътор ал ръмъшіцеї.

$$(21x^2 - bx - 10b^2) : (7x-5b) = 3x+2b$$
$$21x^2 - 15bx$$
$$- \quad +$$
$$14bx - 10b^2$$
$$14bx - 10b^2$$
$$- \quad +$$
$$0$$

de ȣnde se веde къ $7x-5b$ este ꙟmпърцitорȣл комȣn черȣt.

II. Кътimea $x^4+a^2x^2-6a^4=A$ ꙟmпърцindȣse пpin $x^3+5ax^2-2a^2x-10a^3=B$, dъ dpeпt ръmъшiцъ $28a^2x^2-56a^4=28a^2(x^2-2a^2)$; ꙟmпърцitорȣл d'ꙟntꙟĭ B se поate ꙟmпърцi екzакt пpin фъкторȣл x^2-2a^2, аша dap ачest фъкtop ва fi мъsȣра комȣнъ къȣtatъ a кътimiлор A шi B.

III. Daкъ $5a^2-2ax+x^2$ se ва ꙟmпърцi пpin $a^2-2ax+5x^2$, вom авea ръmъшiцъ $8ax-24x^2=8x(a-3x)$; dap $a^2-2ax+5x^2$ ꙟmпърцindȣse пpin $a-3x$ dъ dpeпt ръmъшiцъ кътimea inкомплексъ $8x^3$, ꙟn каpe afapъ de ȣnime niчĭ ȣn фъкtop nȣ se копpinde, пpin каpe sъ se поатъ ꙟmпърцi екzакt кътimiлe комплексе пропȣse, аша dap nȣ аȣ niчĭ ȣn комȣn фъкtop.

§. 130. Пpodȣктȣл $ABCD$.... se поate ꙟmпърцi акоpat пpin fieш каpe din фъкtopiĭ A, B, C шчл.... din каpe ел este компȣs; пе лꙟнгъ ачeasta мȣлte алte nȣmepe аȣ ачeastъ пропpietate, adeкъ тоцĭ ачеꙗ каpiĭ копpind фъкторȣл $ABCD$ se пот ꙟmпърцi пpin nȣmepiлe A, B, C, D шчл. Iap чел маĭ miк din тоate nȣmepiлe, че se пот ꙟmпърцi пpin маĭ мȣлte nȣmepe date A, B, C, шчл, se поate гъsi ꙟn кiпȣл ȣpmъtop: Пpin desfачеpea nȣmepiлор пропȣse ꙟn фъкторĭ simплi, se ва ведеа dакъ ачещia sꙟnt авsолꙋt ꙟntꙟitopĭ saꙋ̆ intpe eĭ ꙟntꙟitopĭ, saꙋ̆ dакъ копрid maĭ мꙋлцĭ ко-mꙋnĭ fъкъtopĭ.

I. De вор fi авsолꙋt ꙟntꙟitopĭ, saꙋ̆ ꙟntpe eĭ ꙟntꙟitopĭ, чел maĭ mik нꙋмър че se поate ꙟmпърцi прintр'ачещia ва fi продꙋктꙋл ачелораш нꙋмере. Sпре пiлдъ: 210 = 2. 3. 5. 7 este чел maĭ mik нꙋмър каре se поate ꙟmпърцi deodatъ прin тоцĭ ꙟntꙟitopiĭ 2, 3, 5, 7; дꙋпъ ачеаsta, fiind къ 4, 9, 35 sꙟnt ꙟntpe eĭ ꙟntꙟitopĭ, чел maĭ mik нꙋмър че se поate ꙟmпърцi прintр'ачещia ва fi 4. 9. 35 = 1260.

II. Dакъ нꙋмерiле date нꙋ вор fi ꙟntꙟitoape ꙟntpe еле прекꙋm sпре пiлдъ $6 = 2.\,3$; $9 = 3^2$; $12 = 2^2.\,3$; $15 = 3.\,5$; $18 = 2.\,3^2$; $24 = 2^3.\,3$; sъ se лase maĭ ꙟntꙟiĭ ачеа прin каре ꙋнꙋл din челе лалtе se поate ꙟmпърцi акорat, прекꙋm 6, 9, 12 ꙟntp'ачest екzemплꙋ, пентрꙋ къ нꙋмърꙋл каре se поate ꙟmпърцi прin 18 шi 24 se ва пꙋtea ꙟmпърцi шi прin 6, 9, шi 12; din челе лалtе нꙋмере $15 = 3.\,5$; $18 = 2.\,3^2$; $24 = 2^3.\,3$; sъ se ꙟnsemneze тоцĭ fъкъtopiĭ simплi чеĭ deosiвiцĭ 2, 3, 5, лꙋꙟnd чеа maĭ mape пꙋtepe a fieш кърꙋia че se ва гъsi ꙟntp'ꙋнꙋл dintр'ачеste нꙋмере, прекꙋm ꙟn екzemплꙋл $2^3.\,3^2.\,5$; ачеste пꙋtepĭ ꙟnmꙋлцindꙋse ꙟntpe еле вор da $2^3.\,3^2.\,5 = 8.\,9.\,5 = 360$; чел maĭ mik нꙋмър че se поate ꙟmпърцi прin 6, 9, 12, 15, 18 шi 24.

Алt Екzemплꙋ. Din челе de maĭ nainte zise se арatъ къ a^m este чел maĭ mik нꙋмър каре se поate ꙟmпърцi deodatъ прin a, a^2, a^3 шчл шi прin a^m. Adeкъ: 64 прin 2, 4, 8, 16, 32 шi 64, saꙋ̆ 243 прin 3, 9, 27, 81 шi 243.

3. Екzemплꙋ.

$12 = 2^2 . \ 3$
$18 = 2 . \ 3^2$
$30 = 2 . \ 3 . \ 5$
$70 = 2 . \ 5 . \ 7$
$105 = 3 . \ 5 . \ 7 .$

аша dap $2^2 . \ 3^2 . \ 5 . \ 7 = 1260$ este нꙋмърꙋл чел maĭ mік каре поate съ se ↑mпарцъ deodatъ прin 12, 18, 30, 70 шi 105.

4. Екzemплꙋ. Съ se кaꙋte терminꙋл чел maĭ mік че se поate ↑mпърцi акорат прin чеĭ patрꙋ ꙋрmъторĭ.
$24a^3b^2cd$, $18a^4b^3d^5e$; $50abc^2d^2$, $30a^3df$.
Фiind къ $24 = 2^3 . \ 3$; $18 = 2 . \ 3^2$; $50 = 2 . \ 5^2$; шi $30 = 2 . \ 3 . \ 5$; чел maĭ mік нꙋmър че se ↑mпърцi прintр'ачещĭ patрꙋ fъкъторĭ, ва fi $= 2^3 . \ 3^2 . \ 5^2 = 1800$; аша dap терminꙋл кътаt $= 1800a^4b^3c^2d^5ef$.

5. Екzemплꙋ. Съ se кaꙋte чел maĭ mік терmin че se поate ↑mпърцi прin алцĭ treĭ ꙋрmъторĭ:
$21a^2b(c^2 - x^2) = 3 . \ 7 . \ a^2b(c+x)(c-x)$
$14ab^2(c+x) = 2 . \ 7 . \ a . \ b^2(c+x)$
$150abc(c-x) = 2 . \ 3 . \ 5^2 . \ abc(c-x)$
аша dap $2 . \ 3 . \ 5^2 . \ 7 . \ a^2 b^2 c (c+x)(c-x) = 1050a^2b^2c \times (c^2 - x^2)$ este терminꙋл кътаt.

§. 131. Nꙋmърꙋл чел maĭ mік че se поate ↑mпърцi прin maĭ mꙋлte алte нꙋmepe, se поate гъsi шi прintр'алt mіжлок че нꙋ se atърнъ de desfачерea нꙋmерілор ↑n fъкъторĭ simплi. Фie A шi B нꙋmерi-ле але кърора чел maĭ mape комꙋн ↑mпърцitор $= m$; de ꙋnde $A = ma$; $B = mb$ (лꙋ↑ndꙋse a шi b dрепt нꙋ-mepe ↑ntritoape ↑ntpe еле). Чел maĭ mік нꙋmър, че se поate ↑mпърцi прin A шi B ва fi $= mab$; каре se apatъ din компоziцia лꙋĭ. Dap $ma = A$ шi $b = B : m$ dintр'ачеаsta ꙋрmeazъ къ нꙋmърꙋл кътаt este $= A \times B : m$. Аша dap съ se кaꙋte чеа maĭ mape комꙋнъ mъ-сꙋръ а ачелораш нꙋmepe A шi B (§. 126.), съ se ↑mпарцъ ѹпѹл dintр'ачeste нѹмере прintр'ачeastъ мъсѹръ, кѫtѹл sъ se ѫмѹлцeaskъ кѹ чeлълaлt нѹмър, продѹкtѹл ва da пе чел maĭ mік нѹмър че se поate ѫmпърцi прin A шi B. Sпре пiлdъ: 1260 шi 360 аѹ dрепt чea maĭ маре комѹн мъsѹръ = 180, dар 360: 180=2; аша dар 1260×2=2520, este чел maĭ mік нѹмър каре se поate ѫmпърцi de odatъ прin 1260 шi 300.

§. 132. Фie ѭаръш $A=ma$, $B=mb$ (§. 131.) шi H чел maĭ mік нѹмър че se поate ѫmпърцi прin A шi B, пентрѹ каре $H=mab$ (§. 131). Орĭ каре алt нѹмър N se поate ѫmпърцi прin A шi B требѹе sъ аĭбъ форма $N=mabf$, ѫnsemнѫndѹse прin f орĭ каре фъкъtор. Акѹm de se ва пѹне H ѫn локѹ лѹĭ mab, fie $N=Hf$; de ѹnde se веde къ нѹмърѹл N че se поate ѫmпърцi прin A шi прin B se поate ѫmпърцi шi прin H; (adiкъ прin чел maĭ mік нѹмър че se поate ѫmпърцi de o datъ прin A шi прin B.) Sпре пiлdъ 630 se поate ѫmпърцi прin 15 шi 18; аша dар шi прin 90, adiкъ прin чел maĭ mік нѹмър че se поate ѫmпърцi прin 15 шi 18.

§. 133. De se ва sокоtĭ къ чел maĭ mік нѹмър se поate ѫmпърцi прin треĭ алte нѹмере A, B, C, sъ se гъsеаskъ чел maĭ mік dекѫt чел d'ѫntѫĭ каре sъ se поatъ ѫmпърцi прin A шi B; sъ se ziкъ ачеsta H; акѹm орĭ шi H se поate ѫmпърцi прin C, saѹ нѹ. Ѫn чea d'ѫntѫĭ ѫntѫмпларе H ва fi нѹмърѹл черѹt; пентрѹ къ de s'ар афла алt нѹмър maĭ mік h, каре sъ se поatъ ѫmпърцi прin A, B, C, ар требѹi ка шi h sъ se поatъ ѫmпърцi прin H; adiкъ чел maĭ mік нѹмър че se поate ѫmпърцi прin A шi B (§. 132.) каре ѫnsъ нѹ se поate faче пентрѹ къ $h<H$.

Ѫn чеалалtъ ѫntѫмпларе, sъ se каѹte нѹмърѹл чел maĭ mik K каре съ se поатъ ↑mпърці прin H шi C. Акът, fiind къ H se поате ↑mпърці прin A шi B se поате шi K ↑mпърці прin ачелеаш нъmере; de ачеѣ K se ва пътеа ↑mпърці прin A, B, C, шi ва fi ↑нкъ чел maĭ mik нъmър, каре аре ачеаstъ проприetate; пentpъ къ de s'ар afла алт нъmър maĭ mik k, maĭ ↑nt↑ĭ fiind къ k se поате ↑mпърці прin A шi B, ар tребъi съ se поатъ ↑mпърці шi прin H (§. 132.); дъпъ ачеѣ fiind къ k se поате ↑mпърці прin H шi C, ар tребъi съ se поатъ ↑mпърці шi прin K (§. 132.); каре ↑nsъ нъ поате fi, пentpъ къ $k<K$.

Екzemплъ. Съ se каъте нъmързл чел maĭ mik че se поате ↑mпърці прin 15, 18, 24. Чеа maĭ mаре комън тъсъръ а нъmеріЛор 15 шi 18 este 3, de ачеѣ $15 . 18 : 3 = 15 . 6 = 90$, este нъmързл чел maĭ mik каре se поате ↑mпърці прin 15 шi 18: чеа maĭ mаре комън тъсъръ а нъmеріЛор 90 шi 24 este 6, аша dар $90 . 24 : 6 = 90 . 4 = 360$ este нъmързл чел maĭ mik, каре se поате ↑mпърці прin 90 шi 24, saŭ прin 15, 18 шi 24.

Asemeneа se поате детерmina чел maĭ mik нъmър каре se поате ↑mпърці deodatъ прin патръ, чinчĭ saŭ орĭ к↑te нъmере.

Пentpъ Фр↑нцерĭ.

§. 134. De se ва sokoti ънimеа ↑mпърцitъ ↑н пърцĭ d'опоtрiвъ, ъна din еле съ se нъmeaskъ о парте алiкъоtъ (орĭ каре din toтъл); adiкъ жъmъtateа лъĭ, а tреѣ парте, а патра парте, а чinчеа парте, saŭ орĭ каре алтъ парте ъпt-↑mmълцitъ.

§. 135. Фр↑нцереа este ън нъmър каре se поате тъсъра акорат прin партеа алiкъоtъ а ънimеĭ, прекъm: жъmъtateа, doъ а tреѣ, tреĭ а патра, шапте а чinчеа шчл пърцĭ, din каре чеа d'↑nt↑ĭ копрinde жътъtatea ȣnimeĭ odatъ; чea d'aл doiлea, a treꙗ parte de doъ opĭ; чea d'aл treiлea, a patpa parte de treĭ opĭ; шi чea dȣпъ ȣртъ, a чinчea parte de шapte opĭ. Аша dap fie каре fpꙟnцере tребȣе съ аїбъ doĭ tepminĭ, пȣmitopȣл шi пȣmъpъtopȣл; чел d'ꙟntꙟĭ apatъ ꙟn кꙟte пърцĭ d'опotpiвъ se sокоteще ꙟmпрцitъ ȣnimea; чел dȣпъ ȣртъ, кꙟte dintp'ачеле пърцĭ коnpinde fpꙟnцерea. Nȣmitopȣл se sкpie sȣnt пȣmъpъtop, tpъгꙟndȣse ꙟntpe amꙟndoъ o лinie; sпре пiлdъ $\frac{1}{2}$ жȣmъtate; $\frac{2}{3}$ doъ a treꙗ parte; $\frac{3}{4}$ treĭ a patpa parte; $\frac{7}{5}$ шapte a чinчea parte din ȣnime.

§. 136. De se va ꙟmпърцi ȣnimea printp'ȣn пȣmър ꙟntpeг. Sпр. п. prin 5, кꙟtȣл va fi $\frac{1}{5}$, pentpȣ къ ачeastъ fpꙟnцере лȣatъ de чinчĭ opĭ, saȣ ꙟmmȣлцitъ кȣ ꙟmпърцitopȣл dъ ꙗръш ȣnimea, saȣ пъ de-ꙟmпърцitȣл (§. 75.); de общe dap va fi $1 : m = \frac{1}{m}$ pentpȣ къ $\frac{1}{m} \times m = 1$. Акȣm fiind къ este $2 = 1 + 1$, va fi шi $2 : m = 1 : m + 1 : m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$; dȣпъ ачea fiind къ $3 = 1 + 1 + 1$, va fi шi $3 : m = (1 : m) + (1 : m) + (1 : m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m}$. Чea че se dовеdeще ꙟnsъ printp'ачeasta pentpȣ 2 шi 3, ачеꙗш se poate dовеdi шi pentpȣ opĭ каре алt пȣmър n кȣ ачелаш кiп; de ачeꙗ de общe va fi $n : m = \frac{n}{m}$; аша dap fie каре fpꙟnцере este шi кꙟt, каре se паще din ꙟmпърцipea пȣmъpъtopȣлȣĭ prin пȣmitop.

§. 137. Printp'ачеastъ пропрietate a fpɪnџepiлop кɪtъл se поate esпpima atъnчĭ, кɪnd ɪmпъpџitopъл nъ se кoпpinde eкzaкt ɪn de-ɪmпъpџit; de ачеasta nъ s'a вopвit ɪn §. 81; аша dap вa fi sпpe пiлdъ $5:7=\frac{5}{7}$; $3ab:5cd=\frac{3ab}{5cd}$, $2a:(2a-b)=\frac{2a}{2a-b}$; $(2a+3b):7ab=\frac{2a+3b}{7ab}$; $(5a-2b):(5a+2b)=\frac{5a-2b}{5a+2b}$,

§. 138. Фiind $n:m=\frac{n}{m}$ вa fi ши $\frac{n}{m}\times m=n$ пentpъ къ de-ɪmпъpџitъл se фаче, кɪnd кɪtъл se ɪmmълџеще къ ɪmпъpџitopъл; аша dap fpɪnџepea ɪmmълџitъ къ пъmitopъл seъ dъ пъ пъmъpътop. Sпpe пiлdъ: $\frac{3}{9}\times 5=3$; $\frac{5ab}{3cd}\times 3cd=5ab$; $\frac{7a+3b}{4a-5b}\times(4a-5b)=7a+3$.

§. 139. Фiind къ este $\frac{am}{m}=am:m=a$, пъmъpъл ɪntpeг a se поate пpeфаче ɪn fpɪnџepe de ъn пъmitop dat m, кɪnd пъmъpъл ɪntpeг se вa ɪmmълџi пpin m, ши sъвт пpodъкtъл am se вa sкpi пъmitopъл m; вa fi sпpe пiлdъ: $3=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\frac{15}{5}$ шчл. saъ $3ab=\frac{3abc}{c}=\frac{15ab^2}{5b}=\frac{21ab\ (a+b)}{7\ (a+b)}$ шчл. saъ de вa fi sъ se пpeфакъ $a+b$ ɪn fpɪnџepe къ пъmitopъл $a-b$; $a+b=\frac{(a+b)\ (a-b)}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{a-b}$.

§. 140. Фpɪnџepiлe пъmepiче se ɪmпapt ɪn a d e в ъ p a t e ши n e a d e в ъ p a t e.

I. Adeвъpatъ se пъmeщe ачеa fpɪnџepe, aл къpia пъmъpътop este maĭ miк deкɪt aл seъ пъmitop, кape пріn ꙋрmape este шi maĭ mikъ dekѣt ꙋnimea. Asfeл sѫnt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, шчл. Ѫntpe aчestea se пot sokoti шi fpѫnцеpiле nexotъpѫte, aĭ кърора nꙋmъpъtopĭ ѫmпъpцindꙋ-se пpin nꙋmitopĭ, daꙋ̆ кѫtꙋpĭ nꙋmaĭ ѫn fpѫnцеpĭ; aчest feл sѫnt $\frac{a}{b}$; $\frac{3a-b}{c}$; $\frac{7a+b}{5c-d}$, шчл. Dap fiind къ пpeцꙋpiле літеpiлор nꙋ sѫnt xotъpѫte, nꙋ se поate dobedi de обще къ aчeste fpѫnцеpĭ sѫnt maĭ miчĭ dekѫt ꙋnimea.

II. Фpѫnцеpĭ ne-adeвъpate se zik aчелеа aĭ кърора nꙋmъpъtopĭ nꙋ sѫnt maĭ miчĭ dekѫt nꙋmitopiĭ лор; aчestea se ѫmпapt ѫn doъ feлꙋpĭ.

1. Фpѫnцеpĭ e-adeвъpate impropriĭ sѫnt aчелеа, aĭ кърора nꙋmъpъtopĭ, opĭ sѫnt d'oпotpiвъ кꙋ nꙋmitopiĭ лор, saꙋ̆ sѫnt aл лор пpodꙋкt; ѫn amѫndoъ ѫntѫmплъpiле fpѫnцеpiле se пot пpefaчe ѫn nꙋmepe ѫntpeцĭ. Чea d'ѫntѫĭ ѫntѫmплаpe penpezinteazъ fpѫnцеpea $\frac{m}{m}$, aл къpia пpeц este ꙋnimea; (пentpꙋ къ $\frac{m}{m}=m:m=1$)

спpe пiлdъ $\frac{7}{7}=1$; $\frac{2ab}{2ab}=1$; $\frac{a+3b}{a+3b}=1$; шчл.

Ѫn чeaлaлtъ ѫntѫmплаpe fpѫnцеpea ва fi de fopma $\frac{am}{m}$, aл къpia пpeц este a; (fiind къ $\frac{ma}{m}=ma:m=a$)

S. п. $\frac{35}{7}=5$; $\frac{4ab}{2a}=2b$; $\frac{3(a^2-x^2)}{a+x}=3(a-x)$;

пpeцꙋpiле aчestop feл de fpѫnцеpĭ se гъsesk ѫmпъpцindꙋ-se nꙋmъpъtopꙋл пpin nꙋmitop.

2. Фpѫnцеpĭ ne-adeвъpate пpoпpiĭ sѫnt aчелеа aĭ кърора nꙋmъpъtopĭ sѫnt maĭ mapĭ dekѫt nꙋmitopiĭ лор, ѫnsъ fъpъ a se ѫmпъpцi пpin eĭ ekzakt. Sпp. п. $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$

$\frac{7}{4}$, шчл. Ачеste fрꙟnцерї se копрінd sȣбt фopma $\frac{ma+b}{m}$, ꙟn каре $b<m$, de ȣnde prin ꙟmпърціре, se пot редȣ-че ла нȣmърȣл' ꙟntрег a кȣ fрꙟnцерѣ adeвъраtъ $\frac{b}{m}$, пentрȣ къ $\frac{m\,a+b}{m}=(ma+b):m=a+b:m=a+\frac{b}{m}$ прекȣm sпре пілdъ $\frac{19}{7}=2+\frac{5}{7}$.

§. 141. Аша dар dакъ ла ꙟmпърціреа, орї нȣmе-рікъ, saȣ алџебрікъ, ва еші вре о ръmъшіцъ, аtȣnчї кꙟtȣлȣї парtікȣлар аfлаt se ва adъога fрꙟnцерѣ че se fa-че din ꙟmпърціреа ръmъшіцеї кȣ ꙟmпърціtорȣл; adікъ

$$327:13=25+\frac{12}{13};\quad x^3:(x+b)=x^2-bx+b^2-\frac{b}{x+b}$$

$$(10x^2-bx-20b^2):(2x-3b)=5x+7b+\frac{b^2}{2x-3b}$$

§. 142. Din доъ fрꙟnцерї, аї кърора нȣmіtopї sꙟnt d'опоtрівъ, ачеѣ este maї mape, каре ва авѣ maї mape нȣmърътор, пentрȣ къ копрінde ȣn нȣmър maї mape ал ачелораш пърцї алікȣоte din ȣnime; sпр. п. $\frac{2}{3}$ este de доъ орї maї mape декꙟt $\frac{1}{3}$; $\frac{6}{7}$ este de треї орї maї mape декꙟt $\frac{2}{7}$ шчл; аша dар fрꙟnцерѣ se ꙟmmȣлцеще prin нȣmърȣл ꙟntрег, кꙟnd пъzindȣ-se ачелаш нȣmіtор, se ва ꙟmmȣлці нȣmърътoрȣл кȣ нȣmърȣл ꙟmmȣлціtор; adікъ $\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$; $\frac{2}{7}\times 3=\frac{6}{7}$ ші de обще $\frac{a}{b}\times m=\frac{am}{b}$.

§. 143. Фііnd $\frac{cm}{b}=\frac{c}{b}\times m$, ва fі ші $\frac{cm}{b}:m=\frac{c}{b}$; пȣindȣse $cm=a$ ва fі $c=a:m$; sȣбstitȣindȣse ачеste прецърі, ва фі $\frac{a}{b}:m=\frac{a:m}{b}$; adікъ фрънцерea se ъмпарte прінtр'ън нъмър ънtрег, кънd пъзіndъse ачелаш нъмітор, se ва ъмпърці нъмърътоpъл прінtр'ачел нъмър. Sпр. п. $\frac{6}{7}:3=\frac{2}{7}$; $\frac{12ab}{5c}:4b=\frac{3a}{5c}$.

§. 144. Ръмъінd ачелаш нъмърътор, фрънцерea skade, кънd нъміtоръл креще; къчї de ші копріndе ачелаш нъмър, ънсъ ачest нъмър este фъкът din маї мічї пърцї аліквоte але ънімеї, adікъ $\frac{2}{3}>\frac{2}{4}>\frac{2}{5}>\frac{2}{7}$ шчл. Sокоteaskъ-se ънімea ъмпърціtъ ън b пърцї d'опotрівъ, din каре ъна $=\frac{1}{b}$; dакъ фіе каре dintр'ачеstea se ва ъмпърці ярыш ън doъ пърцї d'опotрівъ, ънімea ачеstор dъпъ уртъ пърцї ва копріnde $2b$, ші ва фі о аst фел de парte $=\frac{1}{2b}$, каре ва фі жъмътатea челії d'ънtъї, saъ $\frac{1}{b}:2=\frac{1}{2b}$. Asemenea se поаte ведi къ este ші $\frac{1}{b}:3=\frac{1}{3b}$, аша dap de обще $\frac{1}{b}:m=\frac{1}{bm}$. Dap фііnd къ este $\frac{2}{b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}$, ва фі ші $\frac{2}{b}:m=\frac{1}{b}:m+\frac{1}{b}:m=\frac{1}{bm}+\frac{1}{bm}=\frac{2}{bm}$; ші asemenea $\frac{3}{b}:m=\frac{1}{b}:m+\frac{1}{b}:m+\frac{1}{b}:m=\frac{1}{bm}+\frac{1}{bm}+\frac{1}{bm}=\frac{3}{bm}$; ачеяш, ші прін asemenea кіп, se поаte аръta pentpъ орї каре алtъ фрънцере; аша dap de обще $\frac{a}{b}:m=\frac{a}{bm}$; saъ фрънцерea se ъмпарte прінtр'ън нъмър ънtрег, кънd нъміtоръл еї se ва ъммълці къ нъмъръл чел ънtрег фъръ de a se skimба нꙋмъръторꙋл. Ѕпр. п. $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{8}$; $\frac{5a}{7b}:3c=\frac{5a}{21bc}$; $\frac{2b}{2(a-b)}:2(a+b)=\frac{2b}{4(a^2-b^2)}$.

§. 145. Акꙋm fiind къ este $\frac{a}{cm}=\frac{a}{c}:m$, ва fi din протiвъ $\frac{a}{cm}\times m=\frac{a}{c}$; съ facem $cm=b$; de ꙋnde ꙋрмеазъ $c=b:m$; съ se sꙋбstitꙋeze aceste преџꙋрї, шi ва fi $\frac{a}{b}\times m=\frac{a}{b:m}$; din каре екꙋацie se аратъ, къ fрꙟнџереа se поate ꙟнкъꙟmmꙋлцi printр'ꙋn нꙋмър ꙟntрег, кꙟnd, пъzindꙋse ал еї нꙋмърьtор, se ва ꙟmпърцi нꙋmitорꙋл printр'ачел нꙋмър: sпр. п. $\frac{3}{8}\times 2=\frac{3}{4}$; $\frac{5a}{21bc}\times 3b=\frac{5a}{7c}$, шчл.

§. 146, Фрꙟнџереа dар se поate ꙟmmꙋлцi шi ꙟmпърцi printр'ꙋn нꙋмър ꙟntрег ꙟn doъ кiпꙋрї. Чеа d'ꙟntꙟї лꙋкраре se face: ꙟmmꙋлцind нꙋмъръторꙋл, saꙋ̆ ꙟmпърцind нꙋmitорꙋл prin ꙟmmꙋлцitор; $\frac{a}{b}\times m=\frac{am}{b}=\frac{a}{b:m}$. Чеа de ал doiлеа: ꙟmпърцind нꙋмъръtрꙋл, saꙋ̆ ꙟmmꙋлцind нꙋmitорꙋл prin ꙟmпърцitор; $\frac{a}{b}:m=\frac{a:m}{b}=\frac{a}{bm}$.

§. 147. Преџꙋл fрꙟнџерiлор нꙋ se skimбъ, кꙟnd amꙟndoї terminiї лор deodatъ, орї se вор ꙟmmꙋлцi saꙋ̆ se вор ꙟmпърцi.

Чea d'ꙟntꙟĭ se demonstpeazъ ꙟntp'aчest кіп: $\frac{a}{b}\times m=\frac{am}{b}$ dꙋпъ §. 142; аша dap $\frac{a}{b}=\frac{am}{b}:m=\frac{am}{bm}$ dꙋпъ §. 144.

Чea d'aлdoiлea. $\frac{a}{b}:m=\frac{a:m}{b}$ dꙋпъ §. 143.

аша dap $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b}\times m=\frac{a:m}{b:m}$, dꙋпъ §. 145.

§. 148. Фіекаpe fpꙟnџepe dap, aĭ къpia tepminĭ вop aвea fъкъtopĭ komꙋnĭ, se поate pedꙋчe лa чea maĭ simплъ esпpesie, fъpъ a se skimвa пpeџꙋл eĭ, кꙟnd tepmeniĭ eĭ se вop ꙟmпъpџі кꙋ чел maĭ mape komꙋn ꙟmпъpџitop (§. 124. ші ꙋpm.); ıap daкъ tepmeniĭ вop fi nꙋmepe ꙟntꙟitoape, saꙋ̆ ꙟntpe eĭ ꙟntꙟitopĭ, fpꙟnџepea nꙋ se вa пꙋtea faчe maĭ simплъ. Екzemплꙋpĭ. $\frac{210}{231}=\frac{10}{21}$; $\frac{8767}{10361}=\frac{11}{13}$; $\frac{455}{595}=\frac{13}{17}$;

$\frac{69}{210}=\frac{6}{10}=\frac{3}{7}$; $\frac{15a^2bc}{25ab^2c}=\frac{3a}{5b}$; $\frac{5(a-b)}{10(a^2-b^2)}=\frac{1}{2(a+b)}$;

$\frac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}=\frac{a-b}{a+b}$, (§. 129.)

§. 149. Фiind $PR:QR=\frac{PR}{QR}=\frac{P}{Q}$, (§. 148.).

пpintp'aчest miжлoк se вop пꙋtea pedꙋчe fpꙟnџepiлe кꙟtꙋpiлop лa tepmeniĭ чeĭ maĭ simплi, daкъ se вop щepџe komꙋniĭ fъкъtopĭ ꙟn de-ꙟmпъpџit ші ꙟmпъpџitop, ші чeĭ лaлџĭ se вop skpi кa niщe fpꙟnџepĭ:

S. п. $27a^3b^2c:9a^2b^2c^2=\frac{3a}{c}$; $20a^mb^3c^5:25a^2b^nc^3=\frac{4a^{m-2}\cdot c^2}{5\cdot b^{n-3}}$; $14(a^2-x^2):21(a-x)^2=\frac{2a(a+x)}{3(a-x)x}$.

§. 150. Фрꙟнц̧ерѣа $\frac{a}{b}$ фъръ a se skimба прец̧ȣл еĭ se поate редȣче ла алт нȣmitop c дакъ c ва fi ȣн продȣкт din b кȣ алт нȣмър. Sъ zічем къ $c=mb$, ші ва fi $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{am}{c}$, ȣnde $m=c:b$. Sпре пілдъ: sъ редȣчем $\frac{5}{7}$ ла нȣmitopȣл 28; fiind къ 28:7=4, amꙟndoĭ tepmeni фрꙟнц̧ерĭ ɪребȣе sъ se ꙟmмȣлц̧ѣаskъ прin 4, ші ва fi $\frac{3}{7}=\frac{20}{28}$.

§. 151. ꙟntp'ачest кіп maĭ мȣлtе фрꙟнц̧ерĭ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ шчл. se пot редȣче ла ȣн комȣн нȣmitop, фъръ a se skimба прец̧ȣл лор: Sъ se гъsѣаskъ нȣмърȣл N че se поate ꙟmпърц̧і прin нȣmitopiĭ фрꙟнц̧еріlор date, ші fie.

$$
\begin{aligned}
N:b &= m, \text{ de ȣnde } N = mb.\\
N:d &= m' \quad \ldots\ldots \quad N = m'd.\\
N:f &= m'' \quad \ldots\ldots \quad N = m''f.\\
N:h &= m''' \quad \ldots\ldots \quad N = m'''h.
\end{aligned}
$$

шчл.

Акȣm дакъ tepmeniĭ фрꙟнц̧еріlор se вор ꙟmмȣлц̧і прin кꙟtȣріле кореsпondente m', m'', m''', шчл. вор еші фрꙟнц̧еріле ȣрmъtoape.

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{ma}{mb} &= \frac{ma}{N}\\
\frac{m'c}{m'd} &= \frac{m'c}{N}\\
\frac{m''e}{m''f} &= \frac{m''e}{N}\\
\frac{m'''g}{m'''h} &= \frac{m'''g}{N}
\end{aligned}
\right\}
$$

каре toate аȣ ачелаш нȣmitop, ші але кърора прец̧ȣрĭ нȣ se deosiбеskȣ din челе dintꙟĭ, пentpȣ къ amꙟndoĭ tepmeni fieкъріа фрꙟнц̧ерĭ s'аȣ ꙟmмȣлц̧іt прintp'ачелаш нȣмър.

De ші ачеastъ редѕчере se поate фаче прin немърцi-nite алte mіжлоаче, пentрѕ къ sѫnt немърцiite нѕме-ріле каре se пot ѫmпърцi прin b, d, f шчл., dар se ва ѫntребѕinца чел маĭ mік dintр'ачеstѕа, ка терме-niĭ фрѫнцерілор съ se поатъ редѕче ла чеа маĭ simплъ еsпресie; кѕm съ se гъсѕаskъ ачеste маĭ mічĭ нѕме-ре s'а аръtat §. 130 ші ѕрm. Ачеst маĭ mік нѕмър съ se ѫmпарцъ прin нѕmіtорѕл fie-къріа фрѫнцерĭ; кѫ-tѕріле съ se ѫmmѕлцеаskъ кѕ нѕмърътoрiĭ кореsпон-denцĭ; продѕктеле вор da пе нѕмърътoрiĭ фрѫнцері-лор редѕse, sѕбt каре se ва skрі ачел маĭ mік нѕ-мър афлаt dрепt нѕмърътор комѕн.

Екzемплѕрĭ. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}$ daѕ $\frac{105}{210}, \frac{140}{210}, \frac{126}{210}, \frac{150}{210}$,

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16} = \frac{8}{16}, \frac{12}{16}, \frac{10}{16}, \frac{7}{16}$.

$\frac{3}{14}, \frac{4}{21} = \frac{9}{42}, \frac{8}{42}, \frac{5}{6}, \frac{3}{10}, \frac{4}{15} = \frac{25}{30}, \frac{9}{30}, \frac{8}{30}$.

$$\frac{1}{2ab}, \frac{c}{4a^2}, \frac{d}{6b^2}, = \frac{6ab,\ 3b^2c,\ 2a^2d}{12a^2b^2}$$

$$\frac{3c}{8a^m b^2}, \frac{5d}{12a^3b^n}, = \frac{9b^{n-2}c,\ 10a^{m-3}d.}{24a^mb^n}$$

$$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{(1-x)^2}, \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{a}{(a+b)^2}, \frac{b}{a^2-b^2} = \frac{a(a-b)}{(a+b)^2(a-b)}, \frac{b(a+b)}{(a+b)^2(a+b)}.$$

пentрѕ къ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

§. 152. Ѫntр'ачеst кіп маĭ мѕлte фрѫнцерĭ se пot редѕче ші ла ачелаш нѕмърътoрĭ, ѫntребѕinцѫndѕ-se de комѕн нѕмърътор нѕмърѕл чел маĭ mік каре съ se поатъ ѫmпърцi прin нѕмърътoрiĭ тѕтѕлор фрѫнцерілор че tребsе съ se редsкъ. Sпре. піldъ: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $=\frac{30}{60}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{30}{50}$, $\frac{30}{42}$.

§. 153. Din frънцеріле редsse ла ачеіашї нsмъръtopї saš ла ачеіашї нsmitopї, ачеа ва fi maї mape, ла чеа d'ънtъї ънtъмпларе, каре ва авеа maї mape нsmъpъtop; іар ла чеа d'алdoiлеа, каре ва авеа maї mik нsmitop.

§. 154. Nsmъpъtopsл frънцері $\frac{-a}{b-c}$ se поate face позitiв, кънd fieш каре tepmin ал frънцерії se ва ънmsлці прin -1, adікъ fie $\frac{-a}{b-c}=\frac{a}{-b+c}=\frac{a}{c-b}$.

Пentps adsнарea ші skъdepea frънцерілор.

§. 155. I. Dакъ нsmitopії frънцерілор, че tребsе съ se adaoце, вор fi d'опоtрівъ, съ se adsне нsmъpъtopі лор ънtр'osзmъ,ssбt каре съ se skpie нsmitopsл комsн; ачеastъ frънцере ва кonpinde atъtea пърцї оаре каре але sнimi, къte sънt toate ъмпреsнъ ън frънцеріле че tребsе а se adъога, каре ва съ zікъ ачеastъ frънцере ва fi sзma frънцерілор парціале.

Sпре піldъ.

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7};\ \frac{1}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}=\frac{13}{9}=1\frac{4}{9}.$$

$$\frac{a}{m}+\frac{2b}{m}+\frac{a-3b}{m}=\frac{a+2b+a-3b}{m}=\frac{2a-b}{m}$$

$$\frac{5x}{1+x}+\frac{3-2x}{1+x}=\frac{3+3x}{1+x}=\frac{3(1+x)}{1+x}=3.$$

IX.

II. Фрѫнцеріле аĭ кърора нѹmitopĭ ѕѫnt deoseвiцĭ se вор adѹче ла ачелаш нѹmitop, dѹпъ ачеѩ ѕѹma лор se ва гъsi dѹпъ регѹла преЧedentъ.

Екzemплѹрĭ. $\frac{5}{6}+\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{25+9+8}{30}=\frac{42}{30}=\frac{7}{5}$.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$;

$\frac{3a}{5b^2c}+\frac{2b}{9ac^2}+\frac{7c}{15a^2b}=\frac{27a^3c+10ab^3+21bc^3}{45a^2\,b^2\,c^2}$;

$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{(1-x)^2}$.

§. 156. Ла skъdepe fрѫнцеріле трeвѹe sъ se adѹкъ ѩръш ла ачелаш нѹmitop, dакъ нѹ'л ва fi авѫnd; dѹпъ ачеѩ нѹmъръtорѹл skъzъtор sъ se skаzъ din нѹmъръtорѹл челѹĭ de skъzѹt (adiкъ, чел dinтѫĭ sъ se adaoцe челѹĭ d'аldoiлеа кѹ semnѹл skimвat) шi sѹвt diferenцa че se ва гъsi sъ se skрie нѹmitорѹл komѹn.

Sпр. п. $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{12}$;

$\frac{2}{3}-\frac{5}{7}=\frac{14-15}{21}=\frac{1}{21}$;

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$;

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf-bcf+bdc}{bdf}$

$\frac{3a}{3a-2b}-\frac{2a}{2a+3b}=\frac{6a^2+9ab-6a^2+4ab}{(3a-2b)\,(2a+3b)}$

$=\frac{13ab}{6a^2+5ab-6b^2}$.

§. 157. Кътimea комплексъ компꙋсъ din тер-менії ꙟntreцї шї фръnцерошї, se поate префаче ꙟn фрън-цере simплъ, кꙟnd термenії ꙟntreцї se вор adꙋче ла нꙋmitopꙋл фрънцерії (§. 139.), dꙋпъ ачеꙗ нꙋmъpъto-рії кꙋ semnele лор se вор фаче о сꙋмъ. Sпр. п.

$$2+\frac{3}{4}=\frac{8+3}{4}=\frac{11}{4};\quad 2-\frac{3}{4}=\frac{8-3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c};$$

$$2+3x+\frac{4(2x^2-1)}{2-3x}=\frac{-x^2}{2-3x}=\frac{x^2}{3x-2}.\ (\S.\ 154.)$$

$$4a-3x-\frac{(3x-10a)x}{2a-x}=\frac{8a^2}{2a-x}.$$

§. 158. Daкъ термenії кътimілор комплексe вор авea конфъкъторї фрънцерошї, сꙋма саꙋ diференца лор se гъseще кꙟnd комфъкъторії термenілор ase-menea se вор adꙋna, саꙋ se вор скъdea dꙋпъ регꙋ-ліле §. 155. 153. Sпр. п.

$$\begin{array}{l}
\frac{5}{7}a^2-\frac{3}{4}ax+\frac{4}{9}x^2=A.\\
\frac{2}{3}a^2+\frac{5}{8}ax-\frac{7}{12}x^2=B.\\
\hline
\frac{29}{21}a^2-\frac{1}{8}ax-\frac{5}{36}x^2=A+B.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{5a}{4b}-\frac{2c}{3d}-\frac{7}{9x}=C.\\
\frac{3a}{8b}+\frac{5c}{6d}-\frac{2h}{3x}=D.\\
-\quad\ -\quad\ +\\
\hline
\frac{7a}{8b}-\frac{3c}{2d}+\frac{6h-7}{9x}=C-D.
\end{array}$$

Пentpȣ ꙟmmȣлцірea fpꙟnцepілop.

§. 159. ꙟn §. 142. s'a apъtat кȣm se ꙟmmȣлцeще o fpꙟnцepe npintp'ȣn nȣmъp ꙟntpeг; aкȣm sъ se гъseaskъ npodȣктȣл кътіmiĭ A кȣ fpꙟnцepea $\frac{m}{n}$. Dȣпъ §. 41. npodȣктȣл se face din фъкъtopȣл A npeкȣm чeлълалt фъкътop $\frac{m}{n}$ este фъкȣt din ȣnime; dap aчeasta se face ꙟmпъpцindȣse ȣnimea npin n ші ꙟmmȣлцindȣse кꙟtȣл $\frac{1}{n}$ npin m; aшa dap sъ se ꙟmпapцъ ші A npin n, ші кꙟtȣл $\frac{A}{n}$ sъ se ꙟmmȣлцeaskъ npin m, (§. 136 ші 142.) npodȣктȣл $\frac{Am}{n}$ ва fi $=A\times\frac{m}{n}$.

§. 160. De ꙗ fi A nȣmъp ꙟntpeг, ва fi $\frac{m}{n}\times A=\frac{mA}{n}$ (§. 142); $A\times\frac{m}{n}=\frac{Am}{n}$ (§. 159.) ші fiind $mA=Am$ ва fi ші $\frac{m}{n}\times A=A\times\frac{m}{n}$, adiкъ aчeлaш npodȣкt ese, кꙟnd fpꙟnцepea se ва ꙟmmȣлцi кȣ nȣmъpȣл ꙟntpeг, saȣ nȣmъpȣл ꙟntpeг кȣ fpꙟnцepea.

§. 161. Daкъ ꙟn §. 159. A ва fi fpꙟnцepe, $A=\frac{a}{b}$, ꙟn aчeлaш napaгpaf ва fi $\frac{A}{n}=\frac{a}{bn}$ (§. 144.) ші dintp'aчeasta $\frac{Am}{n}=\frac{am}{bn}$, de ȣnde ꙗpъш ȣpmeazъ a fi $\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}$, кape ва sъ zікъ, npodȣктȣл a doъ fpꙟnцepĭ se noate aвea кꙟnd se ва ꙟmmȣлцi nȣmъpъtopȣл ȣnȣꙗ кȣ aл чeліĭ лaлte, ші nȣmitopȣл ȣnȣꙗ кȣ nȣmitopȣл чeліĭ лaлte.

§. 162. Прin §. 161. se поate afлa продȣктȣл din treĭ saȣ din maĭ mȣлte frꙟnџерĭ:

пentрȣ кѣ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

din каре ȣрmeaзѣ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$;

шi ꙟнкѣ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ace}{bdf}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}$.

Adiкѣ продȣктȣл maĭ mȣлtор frꙟnџерĭ este o frꙟnџере aĭ кѣріa нȣmѣрѣtорĭ шi нȣmitорĭ sꙟnt продȣктеле din нȣmѣрѣtорiĭ шi нȣmitорiĭ tȣtȣлор fѣкѣtорiлор; шi fiind кѣ ачeste продȣкте *aceg*.....*bdfh*.... рѣmꙟн ачелеаш, ꙟn орĭ че орꙟndȣiaлѣ se вор ꙟmmȣлџi fѣкѣtорiĭ din каре еле se naskȣ; (§. 55.) продȣктȣл шi алtор maĭ mȣлte frꙟnџерĭ ва fi ачелаш ꙟn орĭ каре рꙟndȣiaлѣ se вор ꙟmmȣлџi ꙟntре еле.

§. 163. Фѣкѣtорiĭ ꙟntреџĭ, каре sꙟnt пꙟntре frꙟnџерĭ, trебȣе sѣ se ꙟmmȣлџeaskѣ кȣ продȣктȣл нȣmѣрѣtорiлор; пentрȣ кѣ $a\times\frac{b}{c}\times d\times\frac{e}{f}=ad\times\frac{be}{cf}$ (§. 162.) $=\frac{adbe}{cf}$ (§. 160.)

§. 164. Фѣкѣtорiĭ комплексĭ, ꙟntре aĭ кѣрора termenĭ se aflѣ frꙟnџерĭ, орĭ sѣ se префакѣ ꙟn frꙟnџерĭ simпле (§. 157.) saȣ sѣ se ꙟmmȣлџeaskѣ ꙟntре еĭ ꙟn кiнȣл кѣtimiлор комплексе.

S. п. $(a\pm\frac{b}{c})\ (d\pm\frac{e}{f})=\frac{(ac\pm b)\ (df\pm e)}{cf}$ saȣ $=$

$ad\pm\frac{ae}{f}\pm\frac{bd}{c}\pm\frac{be}{cf}$.

§. 165. Фѣкѣtорiĭ d'опоtрiвѣ, каре sꙟnt копрinшĭ деодатѣ ꙟn нȣmѣрѣtорiĭ шi нȣmitорiĭ frꙟnџерiлор че trебȣе sѣ se ꙟmmȣлџeaskѣ ꙟntре еле, ꙟn продȣкт se щерг, ші аша se пот лепъda maї nainte de a se faче ꙟmmȣлцірea. S. п. $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{f}=\frac{a}{f}$; къчї ла продȣктȣл $\frac{abc}{bcf}$ амꙟndoї tepmeni se пот ꙟmпърці прin комȣпȣл ꙟmпърцітор bc, фъръ a se skimба прецȣл фрꙟнцерії.

§. 166. Din §. 159. se добедеще къ tepminȣл $\frac{ab}{c}$ ꙟn tpeї кіпȣрї se поate desfaче ꙟn doї фъкъторї: $a.\frac{b}{c}$; saȣ $b.\frac{a}{c}$; saȣ $ab.\frac{1}{c}$ daȣ ачелаш продȣкт $=\frac{ab}{c}$.

§. 167. Фie $m<n$ ші прin ȣрмаре $\frac{m}{n}<1$ o фрꙟнцере adeбъратъ. Акȣm dakъ пȣмърȣл a, орї ꙟnтreг saȣ фрꙟнцере se ба ꙟmmȣлці кȣ $\frac{m}{n}$, ба fi $a\times\frac{m}{n}<a\times 1$, adiкъ $\frac{am}{n}<a$; кꙟnd dap ȣn пȣмър орї каре se ба ꙟmmȣлці прintp'o фрꙟнцере adeбъратъ, продȣктȣл ба fi maї mік декꙟt de-ꙟmmȣлцітȣл; dintp'ачeasta maї ȣрmeazъ къ, продȣктȣл adoъ фрꙟнцерї este maї mік de кꙟt ȣna din амꙟndoъ фрꙟнцеріле. Sпр. п. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, ȣnde $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, ші іаръш $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$; dintp'aчeasta se maї добеще къ пȣtepіле ȣнеї фрꙟнцерї adeбъpate кȣ atꙟt maї мічї бор fi, кȣ кꙟt ла maї mape град se бор рꙟdiка; sпр. п. $\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{8}>\frac{1}{16}>\frac{1}{32}$ ші челе-л-алте.

§. 168. Екzемплъpĭ de ꙟмmȣлцipe кȣ fpꙟнцepĭ:
I. Se чере продȣктȣл кътimiлор A шi B.

$$\frac{a^2}{2}-\frac{2ax}{3}+\frac{3x^2}{4}=A$$

$$\frac{2a^2}{3}+\frac{3ax}{4}-\frac{4x^2}{5}=B$$

$$\frac{a^4}{3}-\frac{4a^3x}{9}+\frac{a^2x^2}{2}$$

$$\frac{3a^3x}{8}-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{9ax^3}{16}$$

$$\frac{2a^2x^2}{5}+\frac{8ax^3}{15}-\frac{3x^4}{5}$$

$$\frac{a}{3}-\frac{5a^3x}{72}-\frac{2a^2x^2}{5}+\frac{263ax^3}{240}-\frac{3x^4}{5}=A\times B.$$

II. $\frac{3(a-x)^2}{5(a+x)^3}\times\frac{2(a+x)^2}{9(a^2-x^2)}=\frac{2(a-x)}{15(a+x)^2}$

III. $\left(a+\frac{2ax}{a-x}\right)\left(a-\frac{2ax}{a+x}\right)=\frac{a^2(a+x)(a-x)}{(a-x)(a+x)}=a^2.$

Пентрȣ ꙟмпърцiрea fpꙟнцepiлор.

§. 169. Съ se ꙟмпарцъ нȣмърȣл A, каре поаtе fi орĭ ȣн нȣмър ꙟntpeг, saȣ fpꙟнцере, прiн fpꙟнцерea $\frac{m}{n}$; шi съ ziчем къ $A:\frac{m}{n}=q$; дȣпъ §. 72. кꙟtȣл q требȣе съ fie нȣмърȣл ачела каре, ꙟмmȣлцiндȣ-se кȣ ꙟмпърцitорȣл $\frac{m}{n}$, съ dea пе de-ꙟмпърцitȣл A; адiкъ ва fi $A=q\times\frac{m}{n}=\frac{mq}{n}$; съ se ꙟмmȣлцeaskъ fieш-каре парte а ачещiĭ екȣацiĭ кȣ n шi ва fi $An=mq$, каре ꙟмпърцindꙋ-se прin m ва da $\frac{An}{m}=q$; dар $\frac{An}{m}=A \times \frac{n}{m}$, de ачеа $A:\frac{m}{n}=A\times\frac{n}{m}$; adiкъ кѫnd ꙋn нꙋмър ва tребꙋi sъ se ꙟмпарцъ прintр'о fрѫнцере, кѫtꙋл ва fi d'опоtрiвъ кꙋ продꙋкtꙋл din de-ꙟмпърцitꙋл шi din ꙟмпърцitорꙋл ꙟntорs.

1. Фie нꙋмърꙋл de-ꙟмпърцit ꙋn ꙟntрег a, ва fi dар

$$a:\frac{m}{n}=a\times\frac{n}{m}=\frac{an}{m};$$

2. Фie нꙋмърꙋл de-ꙟмпърцit о fрѫнцере $\frac{a}{b}$; шi ва fi

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\times\frac{n}{m}=\frac{an}{bm}.$$

§. 170. Ꙟмпърцiреа dар прin fрѫнцере se редꙋче ла ꙟмтꙋлцiреа прin fрѫнцерї, de ачеа de прisоs este a se маї репеtа aiчї чеа че s'a zis §. 164, 165. Екzемпларї.

I. $\frac{a}{b}:(c\pm\frac{d}{f})=\frac{a}{b}:\frac{cf\pm d}{f}=\frac{af}{b(cf+d)}$

II. $(a+\frac{b}{c}):(d\pm\frac{e}{f})=\frac{ac\pm b}{c}:\frac{df\pm e}{f}=\frac{(ac\pm b)\ f}{(df\pm e)\ c}$

III. $\frac{4(a^2-4x^2)\,x^m}{21(a+x)}:\frac{6(a+2x)x^3}{7(a^2-x^2)}=\frac{2}{9}(a-x)\times(a-2x)x^{m-3}.$

VI.

$$\left(\frac{5x^3}{4m^3}-\frac{169ax^2}{180m^2}+\frac{a^2x}{6m}+\frac{6a^3}{25}\right):\left(\frac{5x}{6m}+\frac{3a}{10}\right)=$$

$$\frac{5x^3}{4m^3}+\frac{9ax^2}{20m^2} \qquad\qquad \frac{3x^2}{2m^2}-\frac{5ax}{3m}+\frac{4a^2}{5}$$

$$- \quad -$$

$$-\frac{25ax^2}{18m^2}+\frac{a^2x}{6m}$$

$$-\frac{25ax^2}{18m^2}-\frac{a^2x}{2m}$$

$$+ \quad +$$

$$\frac{2a^2x}{3m}+\frac{6a^3}{25}$$

$$\frac{2a^2x}{3m}+\frac{6a^3}{25}$$

$$- \quad -$$

$$0$$

§. 171. Фie $n>m$ пentpȣ каpe ва fi $\frac{n}{m}>1$ шi $\frac{an}{m}>a$; dap $\frac{an}{m}=a:\frac{m}{n}$ (§. 169.) de ачеѣа шi $a:\frac{m}{n}>a$; аша dap пȣмъpȣл ꙟmпъpцit пpintp'o fpꙟнцepe adeвъpatъ, dъ ȣn кꙟt maĭ mape dekꙟt sine ꙟnsȣшĭ; ıap dakъ пȣмъpȣл a ва fi maĭ mik dekꙟt ȣnimea, tpeĭ ꙟntꙟmплъpĭ tpeбȣe a se лȣa ꙟn бъгape de seamъ;

ꙟntꙟĭ, $a=\frac{m}{n}$; каpe dъ $a:\frac{m}{n}=1$

ал doiлea, $a<\frac{m}{n}$; .... $a:\frac{m}{n}<1$.

X.

ал treiлea, $a>\frac{m}{n}$; .... $a:\frac{m}{n}>1$.

Adiкъ dakъ nȣmъpȣл se ва ꙟmmȣлцi printp'o fpꙟnцepe adeвъpatъ maĭ mikъ deкꙟt eл ꙟnsȣшĭ, кꙟtȣл ва fi maĭ mape deкꙟt de-ꙟmпъpцitȣл шi deкꙟt ȣnimea.

§. 172. Фie $\frac{m}{n}>\frac{r}{s}$, dintp'aчeasta ва fi $m>nr$, шi $\frac{s}{r}>\frac{n}{m}$, de aчea $\frac{as}{r}>\frac{an}{m}$; adiкъ $a:\frac{r}{s}>a:\frac{m}{n}$ (§. 169.) аша dap кȣ кꙟt maĭ mikъ este fpꙟnцepea, prin кape aчeлaш nȣmъp se ꙟmпъpцeщe, кȣ atꙟt maĭ mape este кꙟtȣл.

§. 173. Din §. 172. шi 171. ȣpmeazъ къ ръmꙟind aчeлaш nȣmъp de-ꙟmпъpцit, dakъ ꙟmпъpцitopȣл se ва mikшopa fъpъ mъpцinipe, кꙟtȣл ва кpeщe ꙗpъш nemъpцinit. Spe пildъ. $1:\frac{1}{10}=1$; $1:\frac{1}{100}=100$; $1:\frac{1}{1000}=1000$ шчл. Чeл maĭ dȣпъ ȣpmъ tepmin aл кътimeĭ чe se mikшopeazъ este nimikȣл; de aчea $a:o$ saȣ̆ $\frac{a}{o}$ tpeбȣe sъ fie maĭ mape deкꙟt opĭ кape aлt nȣmъp чe se poate apъta, adiкъ tpeбȣe sъ fie ȣn nȣmъp nemъpцinit, кape se apatъ кȣ semnȣл ∞; dintp'aчeasta ȣpmeazъ къ $\frac{a}{o}=\infty$ шi $\frac{a}{\infty}=0$.

Пentpȣ fpꙟnцepĭ nepegȣлate.

§. 174. Фpꙟnцepĭ nepegȣлate sꙟnt aчeлea aĭ кърopa opĭ nȣmъpъtopiĭ, saȣ̆ nȣmitopiĭ, saȣ̆ amꙟndoĭ deodatъ, nȣ sꙟnt nȣmepe ꙟntpeцĭ. Aчeste fpꙟnцepĭ sꙟnt de mꙋлte feлꙋрĭ, dꙋпъ кꙋm sѫnt тepmenіĭ лор, орĭ къtimĭ комплексе, saꙋ̆ ꙗръш продꙋкtꙋрĭ але maĭ mꙋлtор fрѫnцерĭ, шч. Dар ѫn орĭ каре ѫntѫmпларе fрѫnцеріле нерегꙋлаte se пot редꙋче ла fрѫnцерĭ регꙋлаte. Фіе $\frac{P}{Q}$ нꙋmърътoрꙋл, $\frac{R}{S}$ нꙋmitоpꙋл ꙋнеĭ fрѫnцерĭ нерегꙋлаte, каре se поаte skріе $\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}}$; ачеаsta se поаte префаче ѫn fрѫнцере регꙋлатъ ѫn доъ кіпꙋрĭ: Ѫntѫĭ, съ se ѫmmꙋлцеаskъ amѫndoĭ тepminіĭ прin продꙋкtꙋл нꙋmitорілор QS шi ва fi: $\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}}=\frac{\frac{P}{Q}\times QS}{\frac{R}{S}\times QS}=\frac{PS}{QR}$;

Saꙋ̆ ал doiлеа: fie каре fрѫnцере este кѫtꙋл din ѫmпърціреа нꙋmърътoрꙋлꙋĭ прin нꙋmitор, de ачеꙗ:

$$\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}}=\frac{P}{Q}:\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}=\frac{PS}{QR};$$

Ексеmпларꙋрĭ. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2.\ 5}{3.\ 4}=\frac{5}{6}$.

$$\frac{\frac{a-x}{b+x}}{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}=\frac{(a-x)(b^2-x^2)}{(b+x)(a^2-x^2)}=\frac{b-x}{a+x}.$$

$$\frac{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}}{\frac{e}{f} \pm \frac{g}{h}} = \frac{\frac{ad \pm bc}{bd}}{\frac{eh \pm fg}{fh}} = \frac{(ad \pm bc)\,fh}{(eh \pm fg)\,bd}.$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}+\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{15}-\frac{2}{9}\right)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{12}}{\frac{49}{72}\cdot\frac{11}{45}} =$$

$$\frac{11\,.\,45\,.\,72}{11\,.\,36\,.\,49} = \frac{90}{49}.$$

Пentpȣ fpꙟнцepĭ zeчimaлe.

§. 175. Фpꙟнцepe zeчimaлъ se нȣmeщe ачеꙗ ал къpia нȣmitop este пȣtepѣa нȣmъpȣлȣĭ 10; sпр. п. $\frac{3}{10}$, $\frac{72}{100}$, $\frac{809}{1000}$ шчл. ꙟn цeнepaл $\frac{a}{10^m}$.

§. 176. ꙟn sistema dekadikъ a нȣmepiлop пpeцȣл fie къpia цifpe se mъpeщe de zeчe opĭ, кꙟnd ѣa se mȣtъ кȣ ȣn лoк de кътpe ȣnime deлa dpѣanta snpe stꙟnga; шi din npotiвъ, пpeцȣл opĭ къpia цifpe se mikшopѣazъ de zeчe opĭ, кꙟnd se mȣtъ кȣ ȣn лoк snpe dpѣanta. Мъsȣpiлe fpꙟнцepiлop zeчimaлe, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, шчл. saȣ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, шчл. dȣпъ ачеꙗш pegȣлъ se mikшopez deлa stꙟnga лa dpѣanta, пpeкȣm мъsȣpiлe цifpeлop ꙟntpeцĭ . . . 10^3, 10^2, 10, 1, ꙟn sistema dekadikъ; aшa dap ꙟntp'aчest кip se пot skpie шi aчeste fpꙟнцepĭ, лепъdꙟndȣse нȣmitopiĭ; adiкъ пȣindȣ-se a zeчiлѣa пъpцĭ ꙟn лoкȣл чел dintɪĭ dȣпe ȣnimĭ spre dpeapta, a sȣteлea ɪn лoкȣл d'aл doiлea, a miiлea ɪn лoкȣл d'aл treiлea, ші аша maĭ ɪnкoлo. Ка sъ se deosibeaskъ ɪnsъ aчeste frɪnцерĭ de цifpeлe ɪntpeцĭ, sъ tpaџe o лinioapъ ɪntpe ȣnime ші ɪntpe пърціле zeчimaлe; aчeastъ лinioapъ este віргȣлa zeчimaлeлop; аша dep se skpie 2,5 ɪn лок de $2+\frac{5}{10}$; saȣ 32, 73 ɪn лок de $32+\frac{73}{100}$ шчл.; ші dакъ нȣ sɪnt нȣмере ɪntpeцĭ, ɪn лoкȣл ȣnimiлop se пȣne нȣлa; adiкъ $\frac{3}{10}=0{,}3$, $\frac{7}{100}=0{,}07$; $\frac{5}{1000}=0{,}005$, шчл.

§. 177. Цifpa zeчimaлъ ɪn лoкȣл dintɪĭ spre dpeapta віргȣлеĭ, saȣ a zeчeлea пърцĭ, se zik de opdinȣл ɪntɪĭ; a sȣteлea пърцĭ, saȣ цifpa ɪn aл doiлea лок spre dpeapta віргȣлеĭ, este de opdinȣл aлdoiлea; ші аша maĭ ɪnкoлo. Пentpȣ прескȣptape нȣмeaskъ-se indeks (аръtъtop) нȣmъpȣл aчeлa, кape apatъ ла aл кɪteлea лок dȣпъ віргȣлъ se афлъ oape кape цifpъ zeчimaлъ; dакъ adeкъ цifpa zeчimaлъ a ва авеа indeksȣл m, aчea цifpъ ва fi de opdinȣл m, ші прецȣл eĭ $=\frac{a}{10^m}$.

§. 178. Кɪnd dap нȣmъpъtopȣл ȣneĭ frɪnцерĭ zeчimaлe este нȣмаĭ de o цifpъ, ɪnnaintea aчeщia sъ se пȣе (ɪn партea stɪngъ) atɪtea нȣлe, кɪte sɪnt ɪn нȣmitop, saȣ de кɪte opĭ ȣnimea se копріnde ɪn esпonentȣл нȣmitopȣлȣĭ 10 (§. 175.) ші sъ se despapцъ кȣ o віргȣлъ нȣлa чea maĭ despre stɪnga:

s. п. $\frac{7}{10000}$ saȣ $\frac{7}{10^4}=0{,}0007$.

§. 179. Фрɪнцерea zeчimaлъ aл къріа нȣmъpъtop este компȣs de maĭ мȣлte цifpe, se поate penpe-zenta fъръ nȣmitop, кѫnd din nȣmъpъtopȣл eĭ ѫn naptea dpeantъ se вop тъѩ atѫtea цifpe, кѫte ape nȣmitopȣл, saȣ̆ кѫte ȣnimĭ ape esпonentȣл eĭ; пentpȣ къ nȣmъpȣл dekadik se ѫmпapte пpin пȣtepea de 10, кѫnd цifpeлe nȣmъpȣлȣĭ se мȣтъ ла atѫteлea лok spe dpeanta de кътpe ȣnime, кѫte пȣлe копpinde ачea пȣtepe:

(§. 176.) s. п. $\frac{27}{10}=2,7$; $\frac{35}{100}=0,35$; $\frac{302}{100}=3,02$; $\frac{456783}{10^4}=45,6783$.

§. 180. Dakъ ѫnsъ nȣmъpȣл цifpeлop ѫn nȣmъpъtop ва fi maĭ mik dekѫt nȣmъpȣл пȣлeлop ѫn nȣmitop, atȣnчĭ цifpeлe че лinsesкȣ̆, sъ se ѫmплineaskъ кȣ пȣлe ашezate ѫntpe віpгȣлъ шi nȣmъpъtop; s. п. $\frac{3}{100}=0,03$; $\frac{27}{1000}=0,027$; $\frac{325}{10^5}=0,00325$.

§. 181. Фiind къ este $0,327=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{7}{1000}$ (§. 177.), шi fiind къ, adȣкѫndȣ-se ачeastъ fpѫнцepe ла ачeлaш nȣmitop, este шi $0,327=\frac{300}{1000}+\frac{20}{1000}+\frac{7}{1000}=\frac{327}{1000}$; opĭ кape fpѫнцepe zeчimaлъ че копpinde maĭ мȣлte цifpe se поate чiti ѫn doъ кinȣpĭ, пponȣnцiindȣ-se opĭ пpeцȣл fie къpia цifpe deoseвit, saȣ̆ toate ѫmпpeȣnъ кȣ nȣmitopȣл цifpeĭ чeлiĭ maĭ din stѫnгa; ѫn eкzemплȣл de maĭ sȣs tpeвȣe sъ se zikъ: tpeĭ azeчea napte, doъ a sȣta napte, шi шante a mia napte; saȣ̆ tpeĭ sȣte doъ zeчĭ шi шante dintp'o mie.

§. 182: Ачеѣаш se ѫрinѣazъ ші кѫnd ѫmпреѫ-ŋъ кѫ цifpeле zeчimaле se aфлъ ші ѫntpeцĭ. Adiкъ: $23{,}75 = 23 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$; saѫ pedѫкѫndѫse toate ла ѫn пѫmitop коmѫn $23{,}75 = \frac{2300}{100} + \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{2375}{100}$; аша dap opĭ каpe пѫmъp ѣа коnpinde m цifpe zeчimaле, se поate pеnpezenta npin fpѫnцеpѣа $\frac{A}{10^m}$, ѫn каpe пѫmъpъtopѫл A este ѫn пѫmъp ѫntpeг, ші кomпѫs din toate цifpeле пѫmъpѫлѫĭ dat, atѫt челе ѫntpeцĭ, кѫt ші челе zeчimaле; s. п. $0{,}0007 = \frac{7}{10^4}$; $0{,}0025 = \frac{25}{10^3}$; $26{,}583 = \frac{26593}{10^3}$

§. 183. Пpeцѫл fpѫnцеpiĭ zeчimaле пѫ se skimбъ, кѫnd i se вop odъга dѣа dpѣanta opĭ кѫte пѫле, пentpѫ къ fiind s. п. $\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} =$ шчл., ва fi ші $0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500 =$ шчл.

§. 184. Съ se ѫmmѫлцѣаskъ amѫndoĭ tеpmeniĭ fpѫnцеpiĭ $\frac{M}{N}$ npin 10^n, ші ва fi $\frac{M}{N} = \frac{M \,.\, 10^n}{N \,.\, 10^n}$; ші dакъ amѫndoĭ tеpmeniĭ ачещiĭ fpѫnцеpĭ tpansfopmatъ se вop ѫmпъpцi кѫ N ва fi $\frac{M}{N} = \frac{M \,.\, 10^n : N}{10^n}$; sъ zічem къ кѫtѫл din $M.\, 10^n : N = Q$, ші ва fi $\frac{M}{N} = \frac{Q}{10^n}$; de ѫnde se dоведеще къ opĭ каpe fpѫnцеpe коmѫnъ $\frac{M}{N}$ se поate пpeфаче ѫn fpѫnцеpe zeчi-малъ $\frac{Q}{10^n}$; adikъ sъ se ↑mmѕлцеaskъ nѕmърътoрѕл M ал fр↑nцерiĭ $\frac{M}{N}$, че tребѕе sъ se прefaкъ, кѕ о пѕtере оаре каре а nѕmърѕлѕĭ 10; ачеasta se noate faче, к↑nd dea dреаnta nѕmърътoрѕлѕĭ se вор adъoга at↑tеа nѕле, к↑te ѕnimi tребѕе sъ копрiнzъ esnoнentѕл ачелiĭ nѕtерĭ; aчest nроdѕкt sъ se ↑mпарцъ кѕ nѕnѕmitoрѕл N ал fр↑nцерiĭ date, шi к↑tѕл Q ва fi nѕmърътoрѕл черѕteĭ fр↑nцерĭ zечiмале $\frac{Q}{10^n}$; ↑n лок de a se skрie nѕmitoрѕл 10^n, sъ se tae din к↑tѕл Q at↑tеа цifре к↑te ѕnimĭ копрiнde esnoнentѕл n (§. 178 шi 179), adikъ at↑tеа к↑te nѕле s'aѕ̆ adъoгat nѕmърътoрѕлѕĭ M. Este ↑nsъ de требѕĭnцъ a se adъoга nѕmърътoрѕлѕĭ toate nѕлеле nѕtерiĭ 10^n, maĭ nainte de a se faче ↑mпърцiреа; ачеaш se ва feче шi к↑nd ↑n кърцереа лѕкрърi ла ↑mпърцiре, se вор adъoга nѕле ↑ndestѕле ла fie каре ръmъшiцъ, ка sъ se поатъ ѕрma ↑mпърцiреа. Dѕпъ че se съвършаще ↑mпърцiреа, nѕmърътoрѕл M se sokoteще ↑mпърцit кѕ ачеа nѕtере a nѕmърѕлѕĭ 10, ал кърia esnonent sъ fie d'onotрiвъ кѕ nѕmърѕл nѕлелор adъoгate ла ↑mпърцiре, шi dintр'ачелаш nѕmър nѕtереа 10^n, каре n↑nъ ачi ера nеxotър↑tъ, ва fi кѕnoskѕtъ; de ѕnde ѕрmеаzъ къ, din к↑tѕл afлat tребѕе sъ se tae at↑tеа цifре пентрѕ zечiмале, к↑te nѕле se вор fi adъoгat ла ↑mпърцiре.

I. Екzemплѕ: Sъ se прefaкъ fр↑nцереа $\frac{5}{8}$ ↑n zечiмалъ. (Пентрѕ прескѕрtаре ↑n пърцiле ѕрmъtoаре se пѕn nѕmaĭ ръmъшiцеле).

5,0 : 8 = 625
20
40
0

Фiind къ ла ꙟmпърцiре s'аŭ adъorat tpeĭ nѹлe, tpe-бѹe a se тъia tpeĭ цifpe din кꙟtѹл afлat, de ачеia $\frac{5}{8}=0,625$.

II. Екzemплѹ. Sъ se пpefaкъ $\frac{3}{64}$ ꙟn fpꙟнцepe zeчi-малъ.

3,00 : 64 = 46875
440
560
480
320
0

De ачеia $\frac{3}{24}=0,046875$ пentpѹ къ ла ꙟmпърцiре s'аŭ adъorat шase nѹлe.

§. 185. Ла ꙟmпърцiреа комѹнъ, ѹnde нѹмърѹл de-ꙟmпърцit нѹ se поate ꙟmпърцi акорат пpin ꙟm-пърцitop, saŭ ла fpꙟнцepĭ бastapde (§. 140), кꙟtѹл este ѹn нѹмър amestekat, акъpia парte fpꙟнцepoasъ se поate пpefaче ꙟn fpꙟнцepe zeчimaлъ, dѹпъ кiпѹл apъtat ꙟn §. 184. adъogꙟnd ръшъшiцi чeĭ dѹпъ ѹpmъ кꙟte нѹлe тpeбѹeskъ, шi ѹpmꙟnd лѹкpapea.

XI.

III. Екzemплꙋ.

$7269 : 125 = 58152$
1019
190
650
250
0

ꙟntр'ачеastъ ꙟmпърцiре s'аꙋ adъorat трeĭ nꙋле, de ачеа $7269:125$ saꙋ $\frac{7269}{125} = 58,152$.

§. 186. Nꙋлеле че ва авеа ꙟmпърцitорꙋл dеа dреаnta, se ласъ ла ꙟmпърцiре, шi se ꙟmпарte кꙋ челе лалte цifре але ꙟmпърцitорꙋлꙋĭ; пе ꙋрmъ ка sъ se шiе nꙋmърꙋл цifрелор zечimале, че ла ачеаstъ ꙟntꙟmпларе трeбꙋе а se лꙋа din кꙟtꙋл afлat, se вор ꙟmпреꙋnа ла nꙋmър nꙋлеле лъsate ꙟn ꙟmпърцitор, кꙋ nꙋлеле че se вор fi adъorat ла ꙟmпърцiре.

IV. Екzemплꙋ. Sъ se префакъ $\frac{7}{800}$ ꙟn fрꙟнцере zечimалъ.

$7,0 : 8 = 875$
60
40
0

Ла ачеаstъ ꙟmпърцiре трeĭ nꙋле s'аꙋ adъorat, de ачеа кꙟtꙋл afлat ар трeбꙋi sъ se ꙟmпарцъ прin 10^3; dар fiind къ ла ꙟmпърцiре s'аꙋ лъsat доъ nꙋле але nꙋmitорꙋлꙋĭ, кꙟtꙋл afлat трeбꙋе а se ꙟmпърцi прin 10^5; de ачеа 5 цifре трeбꙋе sъ se tae din ел, шi ва fi $\frac{7}{800} = 0,00875$.

V. Екzemплꙋ. Asemenea se гъseщe $\frac{13}{25000}=0,00052$.

§. 187. Фрꙟцеріле din екzемплꙋріле пречеden-te s'aꙋ пꙋтꙋt esпріma акорат пріп fрꙟцері zечімале, каре se ꙟтꙟмплъ foapte pap; челе маї мꙋлте fрꙟце-рї лꙋкрате ꙟntр'ачелаш кіп daꙋ ꙋп шꙟр петърџinit de џifpe zечімале; прекꙋм кꙟnd s'ap префаче fрꙟцерea

$\frac{1}{3}$, калкꙋлꙋл ap da:

$$\begin{array}{l} 1,0 : 3 = 333 \\ \underline{10} \\ \underline{10} \\ 1 \end{array}$$

шча.

Фiind къ ꙟntр'ачeastъ ꙟмпърџipe tot ачеaш ръ-мъшiцъ ese ла fie каре лꙋкраре, ꙟмпърџipea s'ap пꙋ-tea ꙋрma фъръ xotap, de ачеa ва fi:

$\frac{1}{3}=0,333\ldots$ петърџinit.

Asemenea se гъseщe:

$\frac{1}{6}=0,1666\ldots\ldots$ шча.

$\frac{1}{9}=0,1111\ldots\ldots$ шча.

Калкꙋлꙋл пріп каре $\frac{1}{7}$ se префаче ꙟп fрꙟцере zечі-малъ, este прекꙋм ꙋрмеazъ:

$$
\begin{array}{l}
1,0 : 7 = 142857 \\
\underline{}30 \\
\underline{}20 \\
\underline{}60 \\
\underline{}40 \\
\underline{}50 \\
\underline{}
\end{array}
$$

1 шчл.

Фiind къ dap ла a шasea ръmъшiцъ a eшit ıаръш ȣ-nimea, de ȣnde s'a ꙟnчепȣt ꙟmпърцiрea, ачелеaш шase цifpe aflate maĭ ꙟnnainte se вор гъsi de se ва ȣрma ꙟmпърцiрea, de ачеea ва fi:

$\frac{1}{7}$=0,142857142857 .... nemърцinit. Ачest feл de fрꙟнцерĭ zeчimaлe se nȣmeskȣ̆ периодiче, пentрȣ къ ȣрmeazъ a da ȣn шꙟр de ачелеaш цifpe.

§. 188. Съ ziчem къ fрꙟнцерea $\frac{M}{N}$ este pedȣsъ ла tepmeniĭ чеĭ maĭ simплi, шi къ de ачеa M шi N nȣmaĭ aȣ̆ aлt комȣn ꙟmпърцitop; este ꙟnвеdepat къ кꙟtȣл $Q=\frac{M.\ 10^n}{N}$ (§. 184.) nȣ ва fi nȣmър ꙟntper, daкa 10^n nȣ se ва пȣtea ꙟmпърцi акоpat пpin N, кa-pe ачеasta чере кa N съ nȣ копpinzъ aлцĭ fъкъtopĭ de кꙟt nȣmepiле 2 шi 5. Ꙟntꙟmплърiле ꙟn кape Q поa-te fi nȣmър ꙟntper se пot sokoti челе ȣрmъtoape.

I. Фie $N=2^n$; de ȣnde ȣрmeazъ къ $Q=\frac{M.\ 10^n}{2^n}=$ $M.\ 5^n$, шi $\frac{M}{N}=\frac{M.\ 5^n}{10^n}$; ла ачеasta se adȣче Ек-zemплȣл II. §. 184. $\frac{3}{64}=\frac{3}{2^6}=\frac{3.\ 5^6}{10^6}=\frac{46875}{10^6}=$ 0,046875.

II. $N = 5^n$; аша dap $Q = \frac{M.\ 10^n}{5^n} = M.\ 2^n$ ші $\frac{M}{N} = \frac{M.\ 2^n}{10^n}$. Sпр. п. $\frac{7269}{125} = \frac{7269}{5^3} = \frac{7269.\ 2^3}{10^3} = \frac{58152}{10^3} =$ 58, 152 (§. 125.)

III. N ва пѫtea сѣ fie ші продѫктѫл din fѣкѣtopiĭ 2 ші 5; adiкѣ $N = 2^p.\ 5^q$; ші пе лѫнгѣ' аuestea

1) $p = q$; аша dap $N = 2^p.\ 5^q = 10^p$, ѫn каре ѫntѫmпларе ва fi $\frac{M}{N} = \frac{M}{10^p}$ ea ѫnsѣш о fрѫнџере zeuimalѣ.

2) $p > q$; ші аша $p = q + r$, de ѫnde $N = 2^{q+r}.\ 5^q = 2^r \times 10^q$ adiкѣ $\frac{M}{N} = \frac{M}{2^r.\ 10^q} = \frac{M.\ 5^r}{10^{q+r}}$.

Екzemпләрі. $\frac{7}{800} = \frac{7}{2^3.\ 10^2} = \frac{7.\ 5^3}{10^5} = \frac{875}{10^5}$ $= 0{,}00875$ (§. 186.)

3) $p < q$; аша dap $q = p + r$, ші $N = 2^p.\ 5^{p+r} = 10^p.\ 5^r$, de ѫnde $\frac{M}{N} = \frac{M.}{10^p\ .\ 5^r} = \frac{M.\ 2^r}{10^{p+r}}$;

Екzemпләрі. $\frac{18}{25000} = \frac{13}{5^2.\ 10^3} = \frac{13.\ 2^2}{10^5} = \frac{52}{10^5}$ $= 0{,}00052$. (§. 186.)

Daкѣ пѫmitopѫл N ва копрinde вре ѫn алт fѣкѣtop f, afapѣ din 2^n, 5^n, прецѫл fрѫнџеріĭ $\frac{M}{N}$ пѫmaĭ atѫnчĭ se ва пѫtea esпріma акорat прintр'o fрѫнџере zeuimalѣ, кѫnd пѫmѣрѣtopѫл M se ва пѫtea ѫmпѣрці акорat прintр'ачелаш fѣкѣtop f.

Sпр. п. $\frac{1168}{365} = \frac{16}{5} = 3,\ 2$; $\frac{91}{448} = \frac{13}{64} = 0{,}203125$.

§. 189. Afapъ din ɪntɪmплъріле (§. 188.), ɪn каре Q se гъseще a fi ȣn nȣmъp ɪntpeг, fpɪnцepea $\frac{M}{N}$ nȣ se maĭ noate esпpima акорат npintp'o zeчimaлъ.

Adiкъ кɪnd $M.\ 10^n$ nȣ se ва nȣtea ɪmпърці eк-zакt npin N, atȣnчĭ $Q = \frac{M.\ 10^n}{N}$ ва da ȣn nȣmъp a-mestекat; къчĭ съ zічem къ este $Q = R + \frac{S}{N}$, ȣnde R este ȣn nȣmъp ɪntpeг, adeкъ кɪtȣл че s'a aflat ла ɪmпърціpe; шi $\frac{S}{N}$ peпpezentеazъ o fpɪnцepe adeвъ-patъ, eшitъ din ɪmпърціpea ръmъшiцeĭ S npin ɪm-пърціtopȣл N; dintp'ачeasta ȣpmeazъ: $\frac{M}{N} = \frac{Q}{10^n} = \frac{R + \frac{S}{N}}{10^n} = \frac{R}{10^n} + \frac{S}{N.\ 10^n}$. De se ва лȣa dap fpɪnцepea zeчimaлъ $\frac{R}{10^n}$ dpent npeцȣл чeл adeвъpat aл fpɪn-цepi $\frac{M}{N}$, гpeшaлa ва fi $= \frac{S}{N.\ 10^n}$, maĭ mікъ de кɪt fpɪnцepea $\frac{1}{10^n}$, neнtpȣ къ $\frac{S}{N} < 1$; dap nȣtepea 10^n se noate лȣa opĭ кape dȣnъ voinцъ; de ачeea ачeа гpeшaлъ noate fi maĭ mікъ deкɪt opĭ кape aлtъ къti-me mікъ. Snp. n. Sъ se npefaкъ $\frac{1}{13}$ ɪn fpɪnцepe ze-чimaлъ, кape съ nȣ se denъpteze de npeцȣл eĭ чeл adeвъpat niчĭ кȣ o a mia napte.

$$\begin{array}{l} \underline{1,00} : 13 = 76 \\ \quad \underline{90} \\ \quad 12 \end{array}$$

Dȣпъ че s'aȣ̆ adъorat tpeĭ nȣле, ꙟmпърцірea se опреще, ші ese $\frac{1}{13}=0,076+\frac{12}{13.\ 10^3}$; пріn ȣрmаре fрꙟnцерea zeчimaлъ 0,076 se denъpteazъ de fрꙟnцерea $\frac{1}{13}$ кȣ fрꙟnцерea $\frac{12}{13.10^3}<\frac{1}{1000}$

§. 190. Ші fiind къ este, ꙟntꙟĭ:

$\frac{1}{13}-\frac{12}{13.\ 10^3}=0,076$, aл doĭлea

$\frac{1}{13}+\frac{1}{13.\ 10^3}=0,077$, чea d'ꙟntꙟĭ fрꙟnцере zeчimaлъ se denъpteazъ de fрꙟnцерea $\frac{1}{13}$ maĭ mȣлt de кꙟt чea d'aлdoiлea; de ȣnde se ꙟnцелеце къ fрꙟnцерea zeчimaлъ чea maĭ dȣnъ ȣрmъ тpeбȣe sъ se mъреаskъ кȣ o ȣnime, daкъ naptea че se лeanъdъ ва fi maĭ mape deкꙟt жȣmътea ȣnimi de aчest dȣnъ ȣрmъ рꙟnd aл fрꙟnцерi zeчimaлe; saȣ̆ maĭ mape deкꙟt чinчĭ ȣnimĭ de рꙟndȣл ȣрmъtop; кape nentpȣ a se кȣnoaще, sъ se кaȣte ші цifpa zeчimaлъ кape ȣрmeazъ maĭ de anpoane dȣnъ цifpeлe че se чep, ші daкъ aчeasta se ва гъsi maĭ mape deкꙟt 4, se ва adъora лa цifpa de maĭ nainte o ȣnime. Ꙟn eкzemплȣ, aчesta a natpa цifpъ zeчimaлъ ва fi 9, de aчea лenъdꙟndȣ-se чeлe ȣрmътoape se ва adъora лa atpeѣ цifpъ o ȣnime ші se ва faче $\frac{1}{13}=0,077$.

Пentpȣ adȣnapea шi skъdepea fpѫnцepi-лop zeчimaлe.

§. 191. Sъ se aшeze fpѫnцepiлe чe tpeбȣe a se adȣna ѫntp'asfeл de pѫndȣꙗлъ, ѫnkѫt azeчiлea пъpцï, a sȣteлea, шi чeлe лaлte sъ se afлe fie kape sȣбt koлona de aчeeaш pѫndȣꙗлъ. adikъ цifpeлe aчeꙗш koлoane sъ fie nȣmъpъtopï fpѫnцepiлop de aчeꙗш nȣmitopï. Sъ se adȣne aчestea ka шi ѫn adȣnapea oбiчnȣitъ, ѫnчeпѫnd deлa пъpцiлe чeлe maï miчï spre чeлe maï mapï; dȣпъ чe se va sъвѫpшi adъoгapea, se va пȣne віpгȣлa ѫntp'aчeлaш лok, ѫn kape se afлъ ѫn fpѫnцepiлe чe tpeбȣe a se adȣna; nȣmъpȣл чe se va afлa ѫntp'aчest kiп va fi sȣma kъȣtatъ.

Ekzemплȣpï:

I.	II.
5,0159	245,6703
0,703	4038,53
0,64278	78,0035
0,00522	236,349
3,	0,2381
9,3669	4598,7909

§. 192. Лa skъdepea fpѫnцepiлop zeчimaлe sъ se skpie skъzъtopȣл ѫntp'aчeлaш kiп пpekȣm лa adȣnape sȣбt nȣmъpȣл de skъzȣt, шi dakъ nȣmъpȣл цifpeлop zeчimaлe nȣ va fi aчeлaш ѫn amѫndoъ пъpцiлe, лokȣpiлe гoaлe sъ se ѫmплineaskъ kȣ nȣлe (§. 183.); dȣпъ aчeea sъ se skazъ ȣn nȣmъp din чeлъ-л-aлt dȣпъ kiпȣл oбiчnȣit пentpȣ nȣmepiлe ѫntpeцï, шi лa pъmъшiцъ se se пȣe віpгȣлa ѫntp'aчeлaш лok, ѫn kape se afлъ лa вpe ȣnȣл din nȣmepiлe чe tpeбȣe sъ se skazъ.

Екzемплꙋрї.

I.	II.	III.
0,067389	0,536802	36,7800
0,065200	0,097820	12,9932
0,002189	0,438982	23,7868

Пеntрꙋ ꙟmmꙋлцїрєа fрꙟнцерїлор zечїмале.

§. 193. Фрꙟнцерєа zечїmалъ se ꙟmmꙋлцеще прїntр'о пꙋtере а нꙋmърꙋлꙋї 10, кꙟnd вїргꙋла se ва mꙋta спре dреапta кꙋ atꙟtєа цїfре, кꙟte пꙋле аре пꙋtерєа нꙋmърꙋлꙋї 10, saꙋ̆ de кꙟte ꙋnїmї este алкътꙋїt експоnentꙋл ачелꙋї нꙋmър. (§. 176.)

Екzемплꙋрї.

$0{,}000327 \times 100 = 00327.$

$0{,}0083 \times 10^5 = 830.$

$27{,}5362 \times 1000 = 27536{,}2.$

§. 194. Фїе нꙋmърꙋл цїfрелор zечїmале але de-ꙟmmꙋлцїtꙋлꙋї $= m$, шї asemenєа нꙋmър ꙟн ꙟmmꙋлцїtор $= n$. Dꙋпъ §. 182. чел d'ꙟnꙟї se поate репрezenta прїн фрꙟнцерєа $\frac{A}{10^m}$, челъ-л-алt прїн $\frac{B}{10^n}$, ꙟн каре A шї B sꙟnt нꙋmере ꙟntреџї шї компꙋсе, A dїн цїfреле de-ꙟmmꙋлцїtꙋлꙋї, їар B dїн цїfреле ꙟmmꙋлцїtорꙋлꙋї. Продꙋкtꙋл ачеstор фъкъtорї ва fї $\frac{A}{10^m}\times\frac{B}{10^n}=\frac{AB}{10^{m+n}}$; ꙟnsъ AB este про ꙋкtꙋл fрꙟнцерїлор zечїmале sокоtїtе ка нїще нꙋmере ꙟntреџї, каре продꙋкt se ꙟmпарte прїн 10^{m+n}, кꙟnd dїntр'ачеstєа se вор ꙟъиа кꙋ о вїргꙋлъ despre dреапta спре stînга atîteа цifpe, кîte zeчimaлe sînt în amîndoї fъкъtopiї de odatъ. De ȣnde se наще pегȣлa ȣpmъtoape пentpȣ înmȣлцipea fpînцepiлop zeчimaлe întpe eлe: **Фъкъtopiї sъ se înmȣлцeaskъ în кinȣл obiчnȣit пentpȣ нȣmepiлe întpeцї, шi din пpodȣктȣл лop sъ se tae atîtea цifpe, кîte sînt în amîndoї fъкъtopiї de odatъ.**

Екzemплȣpї.

I.	II.	III.
2,35	5,372	0,763
4,23	0,053	80
705	16116	61,040
470	26860	
940	0,284716	saȣ 61,04
9,9495		

Dакъ нȣmъpȣл пpodȣктȣлї *AB* ва fi maї mik decît нȣmъpȣл цifpeлop zeчimaлe чe tpeбȣe sъ tae dȣпъ pегȣлa de maї sȣs apъtatъ, цifpeлe чe лiпseskȣ sъ se înплineaskъ кȣ нȣлe, кape se вop skpie întpe віpгȣлъ шi întpe цifpa пpodȣктȣлȣї чea maї despe stînга (§. 180.)

Екzemплȣpї.

IV.	V.	VI.
0,25	12,286	0,035
0,07	0,00072	0,0062
0,0175	24572	70
	08602	210
	0,00884592	0,0002170

Пentpȣ înпъpцipea fpînцepiлop zeчimaлe.

§, 195. Фpînцepea zeчimaлъ se înпapte пpin пȣtepea нȣmъpȣлȣї 10, кînd віpгȣлa zeчimaлeлop se ва mȣta кȣ atîtea лoкȣpї spe stînга, кîte нȣлe ape aчea пȣtepe a нȣmъpȣлȣї 10, saȣ de кîte ȣnimї este компȣs esпonentȣл aчeлȣї нȣmъp. (§. 176).

Екzemплърі.

528,3 : 100 = 5,283

17,25 : 1000 = 0,01725.

0,067 : 10^5 = 0,00000067.

§. 196. Фъкѫndѹ-se ѫnкъ sѹпоziціе къ пѹтървл ціfpeлор zeчimaлe este ѫn de-ѫmпърціt $=m$, шi ѫn ѫmпърціtop $=n$, чел dintѫї se поate репрezenta прin фрѫnцереа $\frac{A}{10^m}$ челъ-л-алt прin $\frac{B}{10^n}$ ѫn каре пѹтърътoрії A шi B sѫnt пѹмере ѫntpeцї, компѹse din ціfреле de-ѫmпърціtѹлѹї шi ѫmпърціtopѹлѹї (§. 182.) Ші прin ѹрmape кѫtѹл ва fi $\frac{A}{10^m}:\frac{B}{10^n}=\frac{A}{10^m}\times\frac{10^n}{B}=\frac{A}{B}\times\frac{10^n}{10^m}=\frac{Q.\ 10^n}{10^m}$, sokotindѹ-se adiкъ $Q=\frac{A}{B}$. Аша dap съ se sokoteaskъ amѫndoъ фрѫнцеріле zeчimaлe ка кѹm ар fi пѹмере ѫntpeцї A шi B, шi съ se каѹte кѫtѹл $Q=\frac{A}{B}$. Іар кѫt despre пѹтървл notелор zeчimaлe че трeбѹe a se тъіа, ачeasta атѫрпъ dела пѹтървл zeчimaлелор ѫn de-ѫmпърціt шi ѫn ѫmпърціtop; de ачееа трeбѹe a se черчeta toate ѫntѫmплъріле че пот съ se ѫntѫmпine.

§. 197. Маї ѫntѫї съ zічem къ A se поate ѫmпърці екzакt прin B, саѹ къ Q este ѹп пѹмър ѫntpeг.

I. De ва fi $m>n$, саѹ dакъ ѫn de-ѫmпърціtѹл вор fi маї мѹлte ціfре zeчimaлe декѫt ѫn ѫmпърціtop, кѫtѹл фрѫнцерілор zeчimaлe ва fi $=\frac{Q}{10^{m-n}}$; de ачееа ла ачeastъ ѫntѫmпларе трeбѹe съ se тae din кѫtѹл zeчimaлелор $m-n$ ціfре, adeкъ атѫтеа кѫтe de-ѫmпърціtѹл ва аееа маї мѹлte декѫt ѫmпърціtopѹл.

1355,89272 : 23,53 = 57,624.

6,773 : 0,13 = 52,1.

0,0185 : 3,7 = 0,005.

0,00162 : 0,06 = 0,027.

Акꙋm tребꙋе a se лꙋa ꙟn бъгаре de seamъ ши ꙟntꙟmплареа кꙟnd ꙟmпърцitорꙋл este ꙋn нꙋмър ꙟntрег, de ꙋnde $n = o$; ши кꙟtꙋл че se чере se гъсеще $= \frac{Q}{10^m}$; saꙋ din кꙟtꙋл Q tребꙋе съ se tae atꙟtea цiфре кꙟte sꙟnt ꙟn de-ꙟmпърцit.

2534,779 : 73 = 34,723.

0,0144 : 6 = 0,0024.

II. De ва fi $m=n$, saꙋ dакъ de-ꙟmпърцitꙋл ши ꙟmпърцitорꙋл ва авеа ачелаш нꙋмър de цifре zечimaле, fiind къ $\frac{10^n}{10^m} = 1$, кꙟtꙋл fрꙟнцерiлор zечimaле ва fi d'опоtрiвъ лꙋi Q, аша dар ла ачеastъ ꙟntꙟmпларе нꙋ se tae din кꙟt нiчi o цifръ zечimaлъ.

304,61 : 3,67 = 83.

7,2 : 0,4 = 18.

0,081 : 0,027 = 3.

III. De ва fi $m<n$; adiкъ dакъ de-ꙟmпърцitꙋл ва копрinde maї пꙋцine цifре zечimaле dекꙟt ꙟmпърцitорꙋл, кꙟtꙋл fрꙟнцерiлор zечimaле ва fi$=Q. 10^{m+n}$; ла ачеastъ ꙟntꙟmпларе tребꙋе съ se adaoџe кꙟtꙋлꙋї Q spре dреanta $n-m$ цifре, adiкъ atꙟtea, кꙟte цifре zечimaле se копrind ꙟn ꙟmпърцitор maї mꙋлt dекꙟt ꙟn de-ꙟmпърцit.

0,027 : 0,0009 = 30.

6,25 : 0,0125 = 500.

30548,8 : 7,6372 = 4000.

Ꙟn sfꙟршit tребꙋе a se черчета ши ꙟntꙟmплареа кꙟnd ва fi $m=o$, saŭ de-ꙟмпърцitꙋл ꙋн нꙋмър ꙟntreг, фъръ zeчimaле; пentrꙋ каре кꙟtꙋл черꙋt ва fi $= Q. 10^n$, adiкъ треꙋꙋе а se adъога кꙟtꙋлꙋĭ Q atꙟtea нꙋле, кꙟte цifpe zeчimaле sꙟnt ꙟn ꙟмпърцitop.

$$27 : 0{,}3 = 80.$$
$$15 \cdot 0{,}03 = 300.$$
$$36911 : 5{,}373 = 7000.$$

Ꙟntꙟмпларiле de maĭ nainte se копpind ꙟntp'ачеastъ регꙋлъ. De-ꙟмпърцitꙋл шi ꙟмпърцitopꙋл съ se sokoteaskъ ка niще нꙋмере ꙟntреџĭ, шĭ съ se каꙋte кꙟtꙋл, каре ва fi ꙋн нꙋмър ꙟntreг, кꙟnd нꙋмърꙋл zeчimaлелор ꙟn de-ꙟмпърцit шi ꙟn ꙟмпърцitop ва fi tot ачелаш, iap fiind din пpotiвъ, se вop tъia din кꙟtꙋл aflat atꙟtea zeчimaле, кꙟte de-ꙟмпърцitꙋл ва авеа maĭ мꙋлte декꙟt ꙟмпърцitopꙋл; saŭ se вop adъога кꙟtꙋлꙋĭ atꙟtea нꙋле, кꙟte цifpe zeчimaле ва авеа de-ꙟмпърцitꙋл maĭ мꙋлt декꙟt ꙟмпърцitopꙋл.

Dакъ ꙟnsъ A нꙋ se поate ꙟмпърцi акоpat пpin B, съ se пpefaкъ fpꙟнџеpea $\frac{A}{B}$ ꙟn fpꙟнџеpe zeчimaлъ (dꙋпъ §. 184.) каре fie $\frac{Q}{10^r}$, de ꙋnde ва fi

$$\frac{A}{10^m} : \frac{B}{10^n} = \frac{A}{B} \cdot \frac{10^n}{10^m} = \frac{Q}{10^r}\ \frac{10^n}{10^m} = \frac{Q.\ 10^n}{10^{m+r}}.$$

Аша dap шi ла ачеastъ ꙟntꙟмпларе se поate апліка регꙋла de maĭ nainte, adъогꙟndꙋ-se нꙋмърꙋлꙋĭ m че еспpimъ zeчimaлеле de-ꙟмпърцitꙋлꙋĭ, нꙋмърꙋл r каре еспpimъ нꙋлеле че se adaогъ ла ꙟмпърцipea лꙋĭ A пpin B.

73,45 : 8 = 9,18125,
97,268 : 1,25 = 77,8144.
11,68 : 3,65 = 3,2.
7,5 : 2,56 = 2,9296875.
3 : 6,25 = 0,48.
3,7 : 62,5 = 0,0592.
3,7 : 0,625 = 5,92.
3,7 : 0,000625 = 5920.

Aчeste екzemплѫрї se adѫк ла ↑nt↑mплърiле (§. 188.), ла каре к↑tѫл se поate esпрima акорat прin fр↑nцере zeчimалъ; прецѫрiле zeчimалелор ѫрmъtoape s↑nt кѫ апропiере, пeнtрѫ къ цifреле zeчimале se пot ѫрma nemърцinit.

0,00837 : 0,063 = 0,132857....
0,476 : 0,0037 = 128,646648....

§. 199. Este шi алt metod de-↑mпърцiреa fр↑nцерiлор zeчimале каре чере о maї mаре бъгаре de sеamъ dек↑t ачела че s'a аръtat п↑нъ aiчї.

↑n орї каре ↑mпърцiре к↑tѫл se поate репрezenta прintр'о fр↑nцере, ал кърia nѫmърътор шi nѫmitор este d'опotрiвъ de-↑mпърцitѫлѫї шi ↑mпърцitорѫлѫї; шi fiind къ прецѫл fр↑nцерi nѫ se skimбъ, dакъ fie каре termin ал ачещiї fр↑nцерї se ва ↑mmѫлцi прintр'ачелаш nѫmър, sъ se ↑mmѫлцеaskъ de-↑mпърцitѫл шi ↑mпърцitорѫл, de ва fi ѫnъл saѷ челъ-л-алt, saѷ am↑ndoї deodatъ fр↑nцерї zeчimале, кѫ о asfел de пѫtере а nѫmърѫлѫї 10, прin каре am↑ndoї sъ se поatъ skimба ↑n nѫmере ↑ntреџї, dѫпъ ачеeа ачeastъ fр↑nцере комѫnъ se поate ↑ntoарче ↑n fр↑nцере zeчimалъ dѫпъ регѫлiле §. 184 шчл.

Dакъ nѫmърѫл цifрелор zeчimале ↑n de-↑mпърцit шi ↑mпърцitор ва fi ачелаш $=n$; шi ѫnѫ шi алtѫ se ↑mmѫлцеще прintр'ачелаш nѫmър 10^n щерг↑ndѫ-se віргѫліле (§. 193.) s. п. $5{,}78 : 0{,}63 = \frac{578}{63} = 9{,}1746$. Dакъ пѫтърѫл zечімалелор ѫn de-ѫmпърціit ші ѫmпърціtор ва fi deoseбit, sъ se ѫmплінеаскъ ѫntр'ачела каре ва авеа маї пѫціne ціfре adъо-ѫndѫ-se sпре dреапта пѫле, ші sъ se щеаргъ віргѫла; атѫнчї fie каре termin se ва афла ѫmmѫлціt кѫ ачеа пѫtере de 10 ал кърia esпоnent ва fi d'опоtрівъ кѫ чел маї маре пѫтър ал zечімалелор.

Sпр. п. $26{,}7035 : 2{,}73 = \frac{267035}{27300} = 9{,}7815 \ldots.$

$$0{,}0659 : 0{,}009342 = \frac{65900}{9342} = 7{,}05416 \ldots.$$

§. 200. Фрѫnцереа періоdікъ $0{,}123123123\ldots$ se поате desfаче ѫn пърціле ѫрмътоаре:

$0{,}123 + 0{,}000123 + 0{,}000000123 +$ шчл. saѫ

$\frac{123}{10^3} + \frac{123}{10^6} + \frac{123}{10^9} +$ шчл. Asemenеа орї каре fрѫnцере de ачеst fел se поаte репрезента прin серіа fрѫnцерілор $\frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \frac{A}{10^{4n}} +$ шчл., ѫn каре A ѫnsemneazъ ціfреле че se репетеазъ пеmърціnit, ші n ѫnsemneazъ пѫтърѫл лор; (ѫn екzемплѫл de маї sѫs $A = 123$, $n = 3$). Акѫm din кътіміле A щі n fрѫnцереа комѫnъ se поате гъsi din каре s'a пъскѫt fрѫnцереа періоdікъ. Sъ пѫmim x fрѫnцереа черѫтъ ші ва fi:

$$x = \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} + \frac{A}{10^{4n}} + \text{шчл.}$$ Ѫmmѫлціndѫ-se fie каре парте а екѫаціі ачещіа, ва da

$10^n x = A + \frac{A}{10^n} + \frac{A}{10^{2n}} + \frac{A}{10^{3n}} +$ шчл. saѫ $10^n x =$

$A+x$; skъzɪndѕse x de amɪndoъ пърцiле ачещiĭ екѕацiĭ ва fi $10^n x - x = A$ saѕ̆ $(10^n - 1)x = A$; ɪn sfɪршit ɪмпърцindѕ-se fie каpe парte а екѕацii челiĭ maĭ dѕпӗ ѕpmъ прin $10^n - 1$ ва da fpɪнцерѣа чеpѕtъ $x = \frac{A}{10^n - 1}$.

Екzemплѕpĭ:

I. $x = 0{,}090909 \ldots A = 09 = 9$ шi $n = 2$

de ачеѣа $x = \frac{9}{10^2 - 1} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.

II. $x = 0{,}121212 \ldots A = 12$, $n = 2$

de ѕnde $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{32}$.

III. $x = 0{,}123123123 \ldots A = 123$, $n = 3$.

de ѕnde $x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$.

Пentpѕ Пѕtepĭ.

§. 201. Пpodѕкtѕл пѕмepiлop d'опоtpiвъ se пѕмеще пѕtеpѣа ѕпѕѣ dintp'ачeste пѕмepe; аша 4, 8, 16 шчл. sɪnt пѕtepĭ але пѕмъpѕлѕĭ 2, пentpѕ къ $4 = 2 \times 2$; $8 = 2 \times 2 \times 2$; шчл. Nѕмъpѕл ɪnsѕшĭ din каpe se фаче пѕtеpѣа, se пѕмеще ръdъчinа ачелiĭ пѕtepĭ; ɪn екzемплѕл de maĭ sѕs 2 este ръdъчinа пѕtepiлop 4, 8, 16 шчл.

§. 202. Фiind къ пѕмъpѕл fъкъtopiлop ла ɪмmѕлцiрe пѕ se мърцinеще пpin пiчĭ о pегѕлъ, dinp'ачеѣаш ръdъчinъ se пot фаче пemъpцinite пѕtepĭ, каpe se deosiвeskѕ̆ ɪntpe еле пpin пѕмъpѕл fъкъtopiлop, каpe sɪnt d'опоtpiвъ кѕ ръdъчinа шi din каpe se afлъ компѕse пѕtepiле; adiкъ $a \times a$ saѕ̆ a^2, este

a doiʌєa пȣtepe, saȣ пътpatȣʌ pъdъчini *a*; ачєа-
єta ꙟmmȣʌціtъ пpin *a* dъ $a \times a \times a$ saȣ a^3 a tpeia
пȣtepe, saȣ кȣбȣʌ pъdъчini *a*; кape ꙟmmȣʌцindȣ-
se пpin *a* dъ a^4 a патpa пȣtepe a pъdъчini *a*; ші
аша maї ꙟnкоʌо. De оnще a^m penpezentєazъ ачєа
пȣtepe a pъdъчini *a*, кape конpinde atꙟцєa fъкътоpї
d'onotpiвъ кȣ *a*, кꙟte ȣnimї se конpind ꙟn esпо-
nentȣʌ *m*.

§. 203. Аша dap dꙟndȣ-se pъdъчina *a* ʌesne se
noate faчe dintpꙟnsa opї кape пȣtepe. Ꙟn taбʌa ȣp-
mътоape se apatъ чeʌe d'ꙟntꙟї tpeї пȣtepї aʌe nȣme-
piʌop natȣpaʌe deʌa ȣnime пꙟnъ ʌa 9:

Pъdъчina, saȣ пȣtepєa ꙟntꙟї	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Пȣtepєa a doъa	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Пȣtepєa a tpєa	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 204. Ȣnimєa ꙟmmȣʌціtъ кȣ sine ꙟnsъшї dъ
dpent пpodȣкt iаpъш ȣnimєa, de ачєа ва fi $1^2 = 1$
$\times 1 = 1$; $1^3 = 1^2 \times 1 = 1$ шчʌ. Ʌa opї кape пȣtepe
se ва pꙟdiка ȣnimєa, tot d'aȣna ва fi d'onotpiвъ кȣ
ȣna, saȣ $1^m = 1$.

§. 205. Ȣn nȣmъp se ꙟmmȣʌцеще пpin 10 кꙟnd
i se adaoгъ dєa dpєanta o nȣʌъ; de ачєа

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 100 \times 10 = 1000$$

шчʌ.

Аша dap пȣtepєa nȣmъpȣʌȣї 10 se noate
afʌa, кꙟnd se воp adъoгa dєa dpєanta ȣni-
meї atꙟtєa nȣʌe, кꙟte ȣnimї sꙟnt ꙟn es-
nonentȣʌ пȣtepi. Snp. n.
$10^6 = 1000000$.

§. 206. Фiind къ пꙋтерiле a^m шi a^n sꙟnt продꙋктꙋрї, чѣа d'ꙟntꙟї din m, чѣа de ал doiлѣа din n fъктopї d'опотрiвъ кꙋ a, продꙋктꙋл лор требꙋе sъ копрinzъ пе fъкъторꙋл a de atꙟtѣа opї, de кꙟte opї ꙋnimѣа se копрinde ꙟn sꙋma $m+n$; de ачѣа ва fi $a^m \times a^n = a^{m+n}$, шi daкъ ачest продꙋкт se ва ꙟmmꙋлцi iаръш прin a^r ва fi $a^m \times a^n \times a^r = a^{m+n} \times a^r = a^{m+n+r}$; аша dap opї кꙟte пꙋтерї але ачелораш ръdъчinї se вор ꙟmmꙋлцi ꙟntpe еле, продꙋктꙋл ва fi о пꙋтере а ачелiї ръdъчinї, каре пꙋтере ва авѣа dpent esпonent sꙋma esпonenцiлор аї тꙋтꙋлор fъкъторiлор.

§. 207. Din параграфꙋл de маї nainte se поate афла кꙟtꙋл, че требꙋе съ iasъ din ꙟmпърцiрѣа ꙋneї пꙋтерї a^m прin вре о алтъ пꙋтере а ачелiаш ръdъчinї. Къчї sъ zічем къ $a^m : a^n = a^x$; прin ꙋрmаре ва fi $a^n \times a^x = a^m$ saꙋ̆ $a^{n+x} = a^m$; аша dap требꙋе sъ fie $n+x=m$, saꙋ̆ sкоцꙟndꙋ-se n din amꙟndoъ пърцiле екꙋацii, $x=m-n$; de ачѣа $a^m : a^n = a^{m-n}$; аша dap esпonentꙋл кꙟtꙋлꙋї se поате авѣа, кꙟnd din esпonentꙋл de-ꙟmпърцitꙋлꙋї se ва sкъdѣа екsпonentꙋл ꙟmпърцiторꙋлꙋї.

§. 208. Ла аплiкацiа ачещiї регꙋлї пот fi патрꙋ ꙟntꙟmплърї:

1) Кꙟnd екsпonentꙋл de-ꙟmпърцitꙋлꙋї ва fi маї маре декꙟт ал ꙟmпърцiторꙋлꙋї, saꙋ̆ $m>n$; fie $n=m-r$, din каре ꙋрmѣазъ $a^m : a^n = a^{m-m+r} = a^r$; аша dap ꙟntр'ачѣаstъ ꙟntꙟmпларе esпonentꙋл кꙟtꙋлꙋї ва fi ꙋn нꙋмър афiрmатiв.

2) Кꙟnd amꙟndoї екsпonenцi, atꙟt ал de-ꙟmпърцitꙋлꙋї кꙟт шi ал ꙟmпърцiторꙋлꙋї, вор fi d'опотрiвъ ꙟntpe еї, saꙋ̆ $m=n$; ꙟntр'ачѣаstъ ꙟntꙟmпларе ва fi $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Dap fiind къ este ꙟnкъ $a^m : a^m = 1$

(къчі орї каре кътime se ва ↑mпърці npin sine ↑nsъшї dъ dpent к↑t ѹnimѣa) ва fi ші $a^0=1$; adікъ орї к↑nd ↑n аплікація регѹлі, §. 207, se ва щерџе esnonentѹл вре ѹнеї пѹтерї; ачѣasta ва fi semnѹ, къ кътimѣa ачѣа s'a ↑mпърціt npin sine ↑nsъшї, ші къ к↑tѹл este d'onotpівъ кѹ ѹnimѣa.

3) К↑nd esnonentѹл de-↑mпърціtѹлѹї ва fi maї mікѹ dек↑t esnonentѹл ↑mпърціtорѹлѹї, saѹ $m<n$; ла ачѣastъ ↑nt↑mпларе ва fi $n=m+r$, de ачѣа: $a^m:a^n=a^{m-m-r}=a^r$, saѹ esnonentѹл к↑tѹлѹї ва fi ѹn нѹmър негатів. Пріn ↑mпърціpѣa обічнѹitъ se гъseще $a^m:a^n=\frac{a^m}{a^{m+r}}$; ші de se вор ↑mпърці amndoї термені ачещії fр↑нџерї npin a^m; $a^m:a^n=\frac{a^{m\cdot m}}{a^{m+r-m}}=\frac{a^0}{a^r}=\frac{1}{a^r}$. Акѹm алъtѹр↑ndѹse ачѣаstъ esпреsie а ↑mпърціpі $a^m:a^n=\frac{1}{a^r}$; кѹ esпреsia de maї naintе вom авѣа екѹація $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$ adікъ пѹтерѣа кѹ esnonentѹл негатів, este d'onotpівъ кѹ fр↑нџерѣа ал къріа нѹmърътор este ѹnimѣa, іар нѹmітор пѹтерѣа ачеліаш ръdъчінї, кѹ ачелаш esnonent ↑nsъ nozitів.

§. 209. Din ↑mпърціpѣa fр↑нџерілор se dобеdеще а fi $1:\frac{1}{a^r}=1\times a^r=a^r$. Dар fiind къ $\frac{1}{a^r}=a^{-r}$, ва fi ші $1:\frac{1}{a^r}=1:a^{-r}=\frac{1}{a^r}$; npin ѹрmаре fък↑ndѹ-se компараціа ↑ntpe am↑ndoъ esпреsiile afлate але ↑mпърціpі $1:\frac{1}{a^r}$ se ва вedѣа къ este $a^r=\frac{1}{a^{-r}}$. Аша dap se поаte mȣta пȣterea deла пȣmърътор ла пȣ-mitор, ші віче верsа, skimbѫndȣ-se semnȣл esпо-nentȣлȣї; adікъ:

$$\frac{a^{\pm m}\,.\,b}{c}=\frac{b}{a^{\pm m}\,.\,c}.$$

§. 210. Dȣпъ че s'a лѫмъчіt din че se nasкȣ̆ пȣterіле negatiве, se пot adȣna регȣліле ѫmmȣлцірі ші але ѫmпърцірі че saȣ̆ аръtat §. 206 ші 207. adікъ вom авеа:

I. $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

II. $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$;

saȣ̆ de опще: $a^{\pm m} \times a^{\pm n} = a^{\pm m \pm n}$. Аша dap ѫn орї каре ѫntѫmпларе продȣкtȣл а доъ пȣterї (fie esпonenцiї лор пȣмере negatiве saȣ̆ пozitiве) ва авеа dрепt esпonent sȣма esпонецілор фъкъторілор.

III. $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . a^n = a^{m+n}$;

IV. $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m . a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$;

V. $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{-m+n}$;

Saȣ̆ de обще $a^{\pm m} : a^{\pm n} = a^{\pm m \mp n} = a^{\pm m-(\pm n)}$. Аша dap кѫtȣл а доъ пȣterї (fie esпonentȣл лор пozitiв saȣ̆ negatiв) este d'опotріvъ кȣ пȣтереа, ал кърia esпonent se ва авеа, кѫnd din esпonentȣл de-ѫmпърцitȣлȣї se ва скъdеа esпonentȣл ѫmпърцitorȣлȣї.

§. 211. Ръdъчina $a^{\pm m}$ рꙟdiкatъ ла вре о пȣtере dъ:

$(a^{\pm m})^2 = a^{\pm m} \times a^{\pm m} = a^{\pm m \pm m} = a^{\pm 2m}$.

$(a^{\pm m})^3 = a^{\pm 2m} \times a^{\pm m} = a^{\pm 2m \pm m} = a^{\pm 3m}$.

шчл.

аша dap de обще $(a^{\pm m})^n = a^{\pm mn}$. Ши кꙟnd esпоnentȣл пȣtepi ва fi nеratiв, ва da:

$$(a^{\pm m})^{-n} = \frac{1}{(a^{\pm m})^n} = \frac{1}{a^{\pm mn}} = a^{\pm mn} = a^{\pm m \times -n}$$

Аша dap ꙟn орĭ каре ꙟntꙟmпларе esпоnentȣл ръdъчini требȣе sъ se ꙟmmȣлцеаsкъ кȣ eкsпоnetȣл ръdъчini че se чере.

§. 212. Dакъ лiтеріле m, n, p, шчл. ꙟnsemneazъ оаре каре нȣмере ꙟntреџĭ, поzitiве saȣ̆ nеratiве, din челе че saȣ̆ zis maĭ nainte se apatъ ꙟnвedepat къ:
$(a^m)^n = a^{mn}$ ши $(a^n)^m = a^{nm}$, de ачеа ши $(a^m)^n = (a^n)^m$. Asemenea ва fi $((a^m)^n)^p = (a^{mn})^p = a^{mnp}$; de ачеа ши $((a^m)^n)^p = ((a^n)^m)^p = ((a^m)^p)^n = ((a^p)^m)^n = ((a^n)^p)^m = ((a^p)^n)^m = a^{mnp}$. Asemenea se ва ȣрma ши кȣ орĭ кꙟцĭ алцĭ esпоnenцĭ. Sпр. п.

$$(2(3a^2)^{-1})^2 = 4(3a^2)^{-2} = \frac{4}{9a^4};\ (5a^n(2b^n c^2)^3)^2$$
$$= 25a^{2m}(2b^n c^2)^6 = 25a^{2m}.\ 64b^{6n}c^{12} = 1600a^{2m}b^{6n}c^{12}.$$

§. 213. Фiind къ este $(ab)^2 = ab\ .\ ab = aabb = a^2b^2$; $(ab)^3 = a^2b^2\ .\ ab = a^3b^3$ шчл. ши de обще $(ab)^n = a^n b^n$; dȣпъ ачеasta ꙗаръш, fiind къ $(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = a^{-n}\ .\ b^{-n}$; de ȣnde de обще $(ab)^{\pm n} = a^{\pm n} b^{\pm n}$; ши fiind къ ачеаш se поate аръта de орĭ кꙟцĭ fъкъtорĭ $abcd$.... se поate ꙟнкреdinца, къ ȣn пpodȣкt se рꙟdiкъ ла о пȣtере, кꙟnd fie каре fъкъtор ал ачелȣĭ пpodȣкt se ва рꙟdiка ла ачеаш пȣtере.

Sпр. п. $10^3 = 2^3 . 5^3 = 8 . 125 = 1000$.
$(30a^m)^2 = 2^2 . 3^2 . 5^2 . a^{2m} = 900a^{2m}$.

§. 214. Фiind кь $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{a^3}$ шчл.; de обще ва fi $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Dap $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$; аша dap ши $\left(\frac{a}{b}\right)^{\pm n} = \frac{a^{\pm n}}{b^{\pm n}}$; adiкъ fpѫнцepȣа se pѫdiкъ ла пȣтере, кѫnd amѫndoĭ тepmeni se вop pedika ла ачеȣаш пȣтере.

Sпр. п. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ шчл. Ачеȣаш se dовеdеще din §. 216. ѫntp'ачest кiп: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$; de ачеȣа $\left(\frac{a}{b}\right)^{\pm n} = (ab^{-1})^{\pm n} = a^{\pm n} . b^{\pm n} = \frac{a^{\pm n}}{b^{\pm n}}$.

§. 215. Фiind къ din фъкъторĭ nozitiвĭ nȣ se поate наще нiч'ȣн продȣкт negatiв, требȣе ка ши toate пȣтерiле ȣneĭ ръдъчiнĭ nozitiвe sъ fie afipmatiвe; de ачеȣа ва fi

$(+a)^n = +a^n$; ши fiind къ este $(+a)^{-n} = \frac{1}{(+a)^n} = \frac{1}{+a^n} = +a^{-n}$; de обще ва fi $(+a)^{\pm n} = +a^n$, fie eксnonentȣл n ȣн нȣмър кȣ soцȣ saȣ фъръ soцȣ.

§, 216. Пътеріле ръдъчінілор негатіве ꙋрmеазъ алtъ регꙋлъ. Sъ se факъ пътереа adoa a ръдъчіні $-a$, ші ва fi позітівъ; пентрꙋ къ $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$; sъ se рɪdіче fie каре парте a ачещії екꙋації ла пътереа n, ші ва fi $((-a)^2)^n = (+a^2)^n$ saꙋ̆

I. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$.

De se ва ɪmmꙋлці екꙋаціа dꙋпъ ꙋрmъ прін $-a$ ва da

II. $(-a)^{2n+1} = +a^{2n} \times -a = a^{2n+1}$.

Din екꙋаціа I. ꙋрmеазъ:

III. $(-a)^{-2n} = \frac{1}{(-a)^{2n}} = \frac{1}{+a^{2n}} = +a^{-2n}$ ші din II. екꙋаціе;

IV. $(-a)^{-2n-1} = \frac{1}{(-a)^{2n+1}} = \frac{1}{-a^{2n+1}} = -a^{-2n-1}$. Екꙋаціїле I. ші II. se копрind ɪntр'о формꙋлъ нꙋмаї: $(-a)^{\pm 2n} = +a^{\pm 2n}$; челе лалtе doъ II. ші IV. se копрind ɪntр'ачеаstъ ꙋрmътoape: $(-a)^{\pm 2n \pm 1} = -a^{\pm 2n \pm 1}$; аша dap ꙋнеї ръdъчіні негатіве пꙋтеріле кꙋ soцꙋ̆ вор fi позітіве, ꙗр челе fъръ soцꙋ̆ негатіве.

§. 217. Челе че s'aꙋ̆ dоведіt ɪn §. 215. ші 216. despre semнеле пꙋтерілор, se пот аръta, ɪntр'алt кіп прін челе doъ ꙋрmътoape:

$(\pm a)^{\pm 2n} = +a^{\pm 2n}$ { §. 215. ші §. 216, I. ші III.

$(\pm a)^{\pm 2n \pm 1} = \pm a^{\pm 2n \pm 1}$ { §. 215. ші §. 216, II. ші IV.

Adікъ пꙋтеріле кꙋ soцꙋ̆ але ꙋнеї ръdъчіні позітіве saꙋ̆ негатіве sɪнt tot d'аꙋна позітіве, ꙗр пꙋтеріле fъръ soцꙋ̆ пъzesк semнꙋл ръdъчінілор.

§. 218. Екzemплȣрї.

$$\left(\frac{2a^3b^2}{3cg^4}\right)^2 = \frac{4a^6b^4}{9c^2g^8};$$

$$\left(-\frac{3a^{2m}b^n c^3}{4g^{m-n}}\right)^3 = -\frac{27a^{6m}b^{3n}c^9}{125g^{3(m-n)}};$$

$$\left(-\frac{1}{3}a^3b^2c^{-2}\right)^2 = \frac{1}{9}a^6b^4c^{-24} = \frac{a^6b^4}{9c^4}$$

$$((2ab^{-2}c^3)^2)^{-3} = (2ab^{-2}c^3)^{-6} =$$

$$2^{-6}a^{-6}b^{12}c^{-18} = \frac{b^{12}}{2^6a^6c^{18}} = \frac{b^{12}}{64a^6c^{18}}.$$

§. 219. De se ва ꙟmmȣлці бinomȣл $A+B$ кȣ sine ꙟnsȣшї ва da $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. Adiкъ пътpatȣл бinomȣлȣї este d'onotpiвъ кȣ sȣma din пътpateлe amꙟndȣpopa tepminiлop; шi din пpodȣкtȣл ꙟndoit aл aчeлopaш tepminї. Пpin лȣкpapea aчeщїї fopmȣлe лesne se noatъ faчe пȣtepea a doa a opї къpȣia бinom. Sпp. п. de se ва чepe пȣtepea бinomȣлȣї $a^2-\frac{x^3}{2}$ sъ ziчem къ $A=a^2$ шi $B=-\frac{x^3}{2}$,

шi ва fi $A^2=a^4$; $2AB=2\times a^2\times-\frac{x^3}{2}=-a^2x^3$;

$B^2=\frac{x^6}{4}$; aшa dap $\left(a^2-\frac{x^3}{3}\right)^2=a^4-a^2x^3+\frac{x^6}{4}$.

§. 220. Tpinomȣл $A+B+C$ se pꙟdiкъ лa пȣtepea a doa, opї ꙟmmȣлцindȣ-se пpin eл ꙟnsȣшї, saȣ sokotindȣ-se кa ȣn бinom aл къpȣia naptea ꙟntꙟї sъ fie $A+B$, шi чeaлaлtъ C. Лa aчeastъ ꙟntꙟmплape ва fi $(A+B+C)^2=(A+B)^2+2(A+B)C+C^2$ §. 219. saȣ $(A+B+C)^2=A^2+2AB+B^2+2AC+2BC+C^2$;

de ȣnde se doвedeще къ пъtратȣл tрinomȣлȣĭ este компȣs din пъtрателе fie кърȣia termin, шi din ꙟndoite продȣктеле че вор еші din ꙟmmȣлцiреа fie кърȣia termin кȣ fie каре din чеĭ-л-алцĭ. Ачеastъ ꙟnsȣші-ре se поate doвedi пentрȣ орĭ каре алt полinom прin лȣкрареа че se арatъ aiчĭ, saȣ шi прin ꙟmmȣлцiреа ȣnȣĭ полinom кȣ алtȣл.

§, 221. Dакъ пъtратȣл $A^2+2AB+B^2$ se ва ꙟm-мȣлцi прin ръdъчina sa, se ва faче кȣбȣл binomȣлȣĭ, adiкъ $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$. Аша dар кȣбȣл binomȣлȣĭ este компȣs din кȣбȣ-рiле fie кърȣia termin, шi din ꙟntpeite продȣктȣрiле fie кърȣia termin ꙟmmȣл-цit прin пъtратȣл челȣĭ лалt. Sпр. п. de se ва чере а tpeia пȣtере а binomȣлȣĭ $3a^2-\frac{2x}{3}$, sъ zi-чem къ $A=3a^2$, $B=-{}_2\,\frac{2x}{3}$; шi ва fi

$$A^3=27a^6\,;\ B^3=-\frac{8x^3}{27}.$$

$$3A^2B=3\times 9a^4\times-\frac{2x}{3}=-18a^4x$$

$$3AB^2=3\times 3a^2\times\frac{4x^2}{9}=4a^2x^2\,;\ \text{аша dар}$$

$$\left(3a^2-\frac{2x}{3}\right)^3=27a^6-18a^4x+4a^2x^2-\frac{8x^3}{27}.$$

§. 222. Кȣбȣл ꙟmmȣлцit кȣ ръdъчina $A+B$, dъ а патра пȣtере $(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$. ꙟntр'ачest кiп se пot faче toate пȣtе-рiле, рidiкꙟndъ-se tрепtat din челе маĭ de жos ла челе maĭ de sɤs. Este ɫnsъ o formɤлъ џенералъ каре esпріmъ o пɤtере орĭ каре нехотърɫtъ $(A+B)^m$ прintр'ачеastъ formɤлъ se поate 'компɤне o пɤtере орĭ каре а ачелɤіаш біnom, фъръ de a faче требɤінцъ sъ se ɫntребɤінцeze пɤtеріле de maĭ жоs.

§. 223. De se ва ɫmmɤлці $x+a$ кɤ $x+b$ ва еші $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$. Ачеst продɤкт ɫmmɤлціndɤ-se кɤ $x+c$ ва da:
$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$; ачеаsta іаръш ɫmmɤлціndɤ-se прin $x+d$ ва da:

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4&+(a+b+c+d)x^3\\&+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&+(abc+abd+acd+bcd)x\\&+abcd.\end{aligned}$$

ші аша maĭ ɫnainte. Акɤm de ва fi нɤмърɤл фъкtорілор нехотърɫt ші $=m$; продɤкtɤл лор ва da серіа ɤрmъtоаре:

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)\ldots=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\\+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}\ldots+Q.\end{aligned}$$

ɫn каре серіе коеfічіенціі A, B, C, D, шчл. sɫnt компɤшĭ din кътіміле a, b, c, ..., ачеst фел
$A=a+b+c+$ шчл. saɤ̆ deопоtрівъ кɤ sɤma ачеstор кътімĭ.
$B=ab+ac+bc+$ шчл. saɤ̆ sɤma біnioамелор ачеstор кътімĭ.
$C=abc+$ шчл. saɤ̆ sɤma терніоанелор
$D=$ este sɤma кɤатерніоанелор, шчл. іар чел dɤпъ ɤрmъ termin Q ва fi продɤкtɤл тɤтɤлор кътімілор a, b, c, шчл.

§. 224. Dакъ din кътіміле a, b, c, d, шчл. (ал кърора нɤмър sъ fie $=m$) ɤna, sпре піldъ a, se ва комбіна кꙋ fie каре din челе лалte, вор еші біnioaneле ab, ac, ad, ae, шчл. ал кърора нꙋмър ва fi $= m - 1$; ші fiind къ ачеꙗш se ва гъsi пентрꙋ fie каре dintр'ачеste кътimĭ, нꙋмърꙋл tꙋtꙋлор біnioaнелор, че se вор faче ꙟntр'ачеst кіп, ва fi $= m(m - 1)$. Dар ꙟntре ачеstea fie каре біnion se faче de доъ орĭ, пентрꙋ къ Sпр. п. біnionꙋл ab se faче odatъ, комбінꙟndꙋ-se a кꙋ b, ші алтъ datъ комбінꙟndꙋ-se b кꙋ a, de ачеꙗ нꙋмърꙋл deosебiteлор біnioane ва fi$=\frac{m(m-1)}{2}$

Sпр. п. чінчĭ кътimĭ a, b, c, d, e, daꙋ $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ біnioane, ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.

Терnioaнеле кътimілор, a, b, c, d, e, шчл. (ал кърора нꙋмър sъ fie $= m$) se формеазъ, dакъ fie каре біnion se ва комбіна кꙋ fie каре dintр'ачеste кътimĭ, afаръ din челе доъ че se конpind ꙟn біnion; adікъ біnionꙋл ab формеазъ терnioaнеле ꙋрmътoape: abc, abd, abe шчл. ал кърора нꙋмър ва fi $= m - 2$. Фiind къ ꙟnsъ нꙋмърꙋл біnioaнелор este $=\frac{m(1-m)}{2}$ ші fie каре dintр'ачеstea dъ $m - n$ терnioane, нꙋмърꙋл tꙋtꙋлор терnioaнелор че se вор форма ꙟntр'ачеst кіп ва fi$=\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$; ꙟntре ачеstea ꙟnsъ fie каре терnion se afлъ формат de треĭ орĭ; adікъ терnionꙋл abc se формеазъ ꙟntꙟĭ комбінꙟndꙋ-se ab кꙋ c; пе ꙋрmъ ac кꙋ b; ші ꙟn sfꙟршit bc кꙋ a; ші fiind къ asemenea se ꙋрmеазъ кꙋ toate челе-л-алte терnioane, нꙋмърꙋл deosебiteлор терnioane ва fi$=\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$.

Spр. п. чінчі кътімі a, b, c, d, e, daŭ $\frac{5.\ 4.\ 3}{2.\ 3.}$ $= 10$ терніоане, abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde. прінтр'асеменеа резонамент se довеdеще къ, dакъ нъмърѫл кътімілор a, b, c, d, e, шчл. ва fi $= m$, нъмърѫл кѫатерніоанелор ва fi $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3.\ 4.}$. Dintр'ачестеа че saŭ аръtat аічі лесне se поате фаче о регѫлъ dѫпъ каре se ѫрмеазъ ачесте еспресії, ші dѫпъ каре se пот ѫntinde немърџініt.

§. 225. Sъ zічем акѫм къ ѫн §. 221. $a = b = c = d =$ шчл. аша dар ші фъкъtорі $x+a$, $x+b$, $x+c$, шчл. sѫnt тоці d'опоtрівъ ѫнtре еї ші кѫ $x+a$, ші fiind къ нъмърѫл лор есте $= m$, продѫкtѫл лор ва fi пѫтереа m а ръdъчіні $x+a$; adікъ $(x+a)(x+b)(x+c)$ $\ldots\ldots = (x+a)^m$.

Dѫпъ ачеа ва fi:

$A = a+a+a+$ шчл $\ldots\ldots = ma$

$B = a^2+a^2+a^2+$ шчл. $\ldots\ldots = \frac{m(m-1)a^2}{2}$ пеntрѫ къ

toate біnіоанеле кътімілор a, b, c, шчл. sѫnt d'опоtрівъ кѫ a^2, adікъ $ab = ac = ad = bd =$ шчл. $= a^2$.

$C = a^3 + a^3 + a^3 +$ шчл. $\ldots\ldots = \frac{m(m-1)(m-2)a^3}{2.\ 3.}$ пеntрѫ къ toate терніоанеле abc, abd, bcd, шчл. sѫnt d'опоtрівъ кѫ a^3.

$D = a^4+a^4+a^4+$ шчл. $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)a^4}{2.\ 3.\ 4.}$.

пеntрѫ къ toate кѫатерніоанеле sѫnt d'опоtрівъ кѫ a^4 шчл.

Пȣindȣ-se ачeste прецȣрї ꙟn локȣл екȣацiї §. 221. ачеasta se ва skimба ꙟn

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}\cdot a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}\ a^2 x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}\ a^3 x^{m-3}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\ a^4 x^{m-4} + \text{ш ч л.}$$

прintр'ачеаstъ лȣкраре binomȣл $x+a$ se поate рꙟdiка ла орї каре пȣтере. Sпр. п. de se ва чере а чinчеа пȣтере а binomȣлȣї $1-b$, sъ se пȣе ꙟn формȣла de маї sȣs $m=5$, $x=1$, шi $a=-b$, редȣкꙟndȣ-se термenі ла чеа маї simпль еsпресie se ва гъsi:
$(1-b)^5 = 1 - 5b + 10b^2 - 10b^3 + 5b^4 - b^5$.

§. 226. Nȣмърȣл терminілор ꙟn орї каре пȣтере, ал кърȣеа еsпonent sъ fie ꙟntрег шi позitiв ва fi мърцinit; къчї de se вор ȣрма маї департе термenі ꙟn формȣла §. 225. ва еші ꙟn sfꙟршit ȣнȣл ал кърȣеа коеfiчient sъ копрinzъ fъкъторȣл $m-m=0$, de ачеа терminȣл ачеsta, шi тоцї чеї ȣрмъторї треȣе sъ se щеаргъ. Sпр. п. пентрȣ $m=2$ ал патрȣлеа термin ва fi nimiк, пентрȣ $m=3$ ал чinчелеа термin se ва щерце шкл.

§. 227. Ꙟn формȣла §. 225. se afлъ toate пȣтеріле кътimi x, dела x^m пꙟнъ ла x, шi терminȣл чел dȣпъ ȣрмъ ва fi a^m; de ачеа fie каре пȣтере а binoмȣлȣї $(x+a)$ ал кърia еsпonent este m, ва fi алкътȣitъ de $m+1$ термenі. Аша dар dакъ пȣтереа ва fi кȣ соцȣ, ачеst нȣмър ал терminілор ва fi fъръ соцȣ, din протiвъ dакъ пȣтереа ва fi fъръ соцȣ нȣмърȣл терminілор ва fi кȣ соцȣ.

§. 228. Din §. 225. ȣрмеазъ iаръш къ este:

$$(x+a)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}a^{m-2}x^2 + \text{шчл.}$$

Аша dар de se ва ɫntoарче рɫndѕл терminiлор че se афлъ ɫn пѕтерѣа binomѕлѕĭ, se вор аръta ачеꙗш коеfiчienцĭ шi ɫntр'ачеꙗш рɫndѕꙗлъ; de ѕnde se dobedеще къ коеfiчienцi крескѕ dела ɫnчепѕt пɫnъ ла терminѕл din miжлок, dѕпъ ачеѣа se афлъ терmeni de maĭ nainte ɫntр'о рɫndѕꙗлъ ɫntoарsъ. Ɫn пѕтеріле кѕ soцѕ терminѕл din miжлок ва авѣа чел maĭ маре коеfiчient; ɫn пѕтеріле фъръ soцѕ ɫnsъ doĭ терmenĭ din miжлок вор авѣа чеĭ maĭ марĭ коеfiчienцĭ каре вор fi d'опоtрiвъ ɫntре еĭ. Sпр. п.

$$(a+x)^6 = a^6 + 6a^5x + 15a^4x^2 + 20a^3x^3$$
$$+ 15a^2x^4 + 6ax^5 + x^6.$$
$$(a+x)^7 = a^7 + 7a^6x + 21a^5x^2 + 35a^4x^3$$
$$+ 35a^3x^4 + 21a^2x^5 + 7ax^6 + x^7.$$

§. 229. Din §. 225. лesne se поate dobedi къ este:

$(a+x)^m = A + B + C + D + E$ шчл. . . . . sокоtindѕ-se

$$A = a^m;\ B = mA.\ \frac{x}{a};\ C = \frac{m-1}{2}\ B.\ \frac{x}{a};$$

$$D = \frac{m-2}{3}\ C.\ \frac{x}{a};\ E. = \frac{m-3}{4}\ D.\ \frac{x}{a};$$ шчл. Ɫnтр'ачеst кiп fie каре терmin ал binomѕлѕĭ se поате форма din чел maĭ dinainte. Deoseбit требѕе съ se ꙗ aminte къ dакъ ръdъчina ва fi $a-x$ ɫntр'ачеsle формѕле пѕтърѕл x требѕе съ se ꙗ кѕ semnѕл skimбat.

Пentрѕ къtimĭ раdiкале.

§. 230. Ɫn параграфѕріле de maĭ nainte s'a аръtat кѕm se поате рɫdiка о ръdъчinъ datъ ла о пѕтере орї каре, акꙋm se ва аръta кꙋm se поate afла ръdъ-чіna ꙋnеї пꙋtерї date.

A skoate a doa, a треєа, a патра шчл. ръdъчіnъ dintр'ꙋn nꙋmър dat ва sъ zікъ: a afла ꙋn asfел de nꙋmър каре рꙟdікꙟndꙋ-se ла a doa, a треєа, a патра шчл. пꙋtере sъ se fакъ d'опоtрівъ кꙋ nꙋmърꙋл dat. Ръdъчіna черꙋtъ se аратъ кꙋ ачеst semn $\sqrt{\;}$, каре se пꙋne ꙟnaintєa nꙋmърꙋлꙋї, шi ꙟn каре se skpie esпonentꙋл радікал, saꙋ̆ nꙋmърꙋл каре аратъ a кꙟteлєa ръdъчіnъ se чере. Snp. n. $\sqrt[2]{A}$ ꙟnsemneazъ a doa $\sqrt[3]{A}$ a треєа ръdъчіnъ a nꙋmърꙋлꙋї A; шi de опще $\sqrt[m]{A}$ ва fi ръdъdъчіna ачеєа a nꙋmърꙋлꙋї A ал кърia esпonent este m. Пentpꙋ прескꙋрtаре esпonentꙋл ръdъчіni a doa nꙋ se skpie, шi аша $\sqrt{A}$ nꙋ se deoseбеще de $\sqrt[2]{A}$. Semnꙋл радікал че se пꙋne ꙟnaintєa ꙋnеї кътimї комплекse, шi ꙟnkisъ ꙟntр'ꙋn парentes, аратъ къ требꙋе a se skoate ръdъчіna dintр'ачєа кътime; Snp. n. $\sqrt[3]{(a+b)}$; maї simплꙋ ꙟnsъ este a se skpie кътimєa fъръ парentes прелꙋnџindꙋse пeste єa semnꙋл, прекꙋm $\sqrt[m]{a+b}$.

§. 231. Sъ zічem къ este $f=\sqrt[m]{A}$. Dꙋпъ difiniџia ръdъчіni требꙋе sъ fie $f^m=A$; шi dinпotівъ dакъ екꙋаџia adoa ва fi adeвърatъ, ва fi шi чєа dꙟntꙟї. Snp. n.

$\sqrt{4}=2$	къчї	$2^2=4$	$\sqrt{25}=5$	къчї	$5^2=25$
$\sqrt[3]{8}=2$	. . . . .	$2^3=8$	$\sqrt[3]{125}=5$	. . . .	$5^3=125$
$\sqrt[4]{81}=3$	. . . . .	$3^4=81$	$\sqrt[4]{2401}=7$	. . . .	$7^4=2401$
шчл.			шчл.		

§. 232. Фiind къ dар, ръdъчina рѫdiкаtъ ла пѹtерea esпonentѹлѹї радiкал, tребѹе sъ dea кътimea desѹбt semnѹ̆; прецѹл кътimeї радiкале, $\sqrt[m]{a^n}$ se поаte esпrima прintр'о formѹлъ ценералъ. Sъ лѹъm $\sqrt[m]{a^n}=a^x$; шi вom авea $a^n=a^{mx}$, de ѹnde $n=mx$ шi dакъ amѫndoъ пърцiле але ачещiї екѹацiї se вор ѫmпърцi прin m, $\frac{n}{m}=x$; аша dар $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$; adiкъ *se поate гъsi ръdъчina пѹterі, ѫmпърцindѹ-se esпonentѹл пѹterі прin esпonentѹл радiкал.*

$\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a^1=a$	$\sqrt[3]{a^3}=a$	$\sqrt[m]{a^m}=a$
$\sqrt{a^4}=a^{\frac{4}{2}}=a^2$	$\sqrt[3]{a^6}=a^2$	$\sqrt[m]{a^{2m}}=a^2$
$\sqrt{a^6}=a^3$	$\sqrt[3]{a^9}=a^3$	$\sqrt[m]{a^{3m}}=a^3$

§. 233. Аша dар кѫnd esпonentѹл пѹterі, а кърia ръdъчinъ se чере, ва fi mѹлtiплѹ esпonentѹлѹї радiкал, ръdъчina ва fi пѹterea кѹ esпonentѹл ѫntрег, пentрѹ къ $\sqrt[m]{(a^{mn})}=a^n$; ръdъчiniле de ачеst fел se ziк *рацiонале.*

§. 234. Dакъ esпonentѹл пѹterі de sѹбt semnѹ̆ nѹ se поate ѫmпърцi екzакt прin esпonentѹл радiкал, шi de ачеа nічї se поate sкоate ръdъчina пе deплin, аtѹnчї se ва цinea semnѹл ръdъчinі че tребѹе sъ se sкоацъ; saѹ̆ dакъ ачеsta se ва лепъda, ръdъчina se поate репрезеnta прintр'о пѹtере че ва авеа dрепt esпonent о frѫnцере, ачеst fел de ръdъчinї se nѹmesкѹ̆ *iрацiонале.*

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ ‖ $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$ ‖ $\sqrt[6]{a}=a^{\frac{1}{6}}$ ‖ $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$

$\sqrt{a^3}=a^{\frac{3}{2}}$ ‖ $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$ ‖ $\sqrt[6]{a^2}=a^{\frac{2}{6}}$ ‖ $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

шчл.

§. 235. Фiind къ este $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$; пѹтерѣа a^n; ал кърia esпonent n este ѹн нѹмър ⱡнтⱡitор, ва авѣа нѹмаĭ о ръdъчiнъ рацioналъ; ачеѣа adiкъ ал кърia esпonent ва fi d'опotрiвъ лѹĭ n. Dакъ ⱡнсъ n ва fi нѹмър компѹs, пѹтерѣа a^n ва авѣа atⱡtѣа ръdъчiнĭ рацioнале, кⱡцĭ ⱡмпърцitорi аре нѹмърѹл n. S. п. fiind къ 12 se поate ⱡмпърцi екzакt прin 2, 3, 4, 6, шi 12; пѹтерѣа a^{12}, ва авѣа ръdъчiна а doа, а трѣа, а патра, а шасѣа шi а doъ sпре zечiлѣа рацioналъ; adiкъ:

$\sqrt{a^{12}}=a^6$; $\sqrt[3]{a^{12}}=a^4$; $\sqrt[4]{a^{12}}=a^3$;

$\sqrt[6]{a^{12}}=a^2$; $\sqrt[12]{a^{12}}=a$. Toate челе-л-алте, кⱡte se вор пѹтѣа чере sⱡнt iрацioнале.

§. 236. Фiind къ este $1^m=1$; ва fi шi $\sqrt[m]{1}=\sqrt[m]{1^m}=1$; аша dар: орĭ каре ръdъчiнъ рацioналъ se ва sкоate din ѹнime, ачѣа ръdъчiнъ ва fi d'опotрiвъ кѹ ѹнimѣа ⱡнсъшĭ.

§. 237. Фie $f=\sqrt[m]{a^n}$; аша dар $f^m=a^n$. Съ se рⱡdiче амⱡndoъ пърцiле ачещiĭ екѹацiĭ ла пѹтерѣа r, шi ва fi $(f^m)^r=(a^n)^r$ saѹ $f^{mr}=a^{nr}$. Съ se sкоацъ dѹпъ ачѣа din амⱡndoъ пърцiле але екѹацiĭ dѹпъ ѹртъ ръdъчiна m, шi ва fi $f^r=\sqrt[m]{a^{nr}}$. Ⱡн sⱡършit пѹindѹ-se ⱡн локѹл лѹĭ f прецѹл лѹĭ ва fi.

$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^r = \sqrt[m]{a^{nr}}$. Аша dap ка съ se рѫdiче о кътime radiкалъ ла о пȣtepe opĭ каре, se ва рѫdiка ла ачеа пȣtepe кътimea de sȣбt semnȣ̆ Snp. п.

$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$; $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$;

$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = \sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$; $\left(\sqrt[m]{\frac{2a}{3b}}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{4a^2}{9b^2}\right)}$

$\left(\sqrt[3]{(5a)}\right)^2 = \sqrt[3]{25a}$; $\left(\sqrt[3]{(2\sqrt[3]{2a})}\right)^2$

$= \sqrt[3]{(4\sqrt[3]{4a^2})}$;

$\left(\sqrt[p]{(a\sqrt[m]{b^n})}\right)^r = \sqrt[p]{\left(a^r\left(\sqrt[m]{b^n}\right)^r\right)} = \sqrt[p]{(a^r\sqrt[m]{b^{nr}})}$.

§. 238. Фie ѩаръш $f = \sqrt[m]{a^n}$ шi $g = \sqrt[p]{f}$ saȣ̆ $g = \sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})}$. Чеа d'ѫntѫĭ dintp'ачеste екȣаціĭ ва da $f^m = a^n$; чеа-л-алтъ ва da $g^{mp} = f^m = a^n$; din каре sкоцѫndȣ-se ръdъчiна mp, ва еші $g = \sqrt[mp]{a^n}$; saȣ̆ пȣindȣ-se ѫn локȣл лȣĭ g прецȣл лȣĭ $\sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})} = \sqrt[mp]{a^n}$. De ȣnde ȣpmeazъ a fi $\sqrt[q]{\left(\sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})}\right)} = \sqrt[q]{(\sqrt[mp]{a^n})} = \sqrt[mpq]{a^n}$, adiкъ opĭ кѫte ръdъчinĭ sȣкsesiве вор fi se se sкоацъ dintp'ȣn нȣмър оаре каре a^n чеа dȣпъ ȣpmъ ва fi d'onotpiвъ кȣ ачеваш кътime a ръdъчini, шi esпonentȣл еĭ ва fi пpodȣктȣл esпonenціилор тȣтȣлор ръdъчiniлор че se вор sкоate.

§. 239. Пе лѫнгъ ачеasta fiind къ este $\sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})} = \sqrt[mp]{a^n}$, прекȣm шi $\sqrt[m]{(\sqrt[p]{a^n})} = \sqrt[mp]{a^n}$, ва fi шi

$\sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})}=\sqrt[m]{(\sqrt[p]{a^n})}$. Asemenѣa ꙋpmѣazъ шi пen-tpꙋ maĭ mꙋлte pъdъчinĭ чe tpeбꙋe sъ se sкoaцъ; aшa dap daкъ dintp'ꙋn nꙋmъp oape кape вop fi sъ se кoaцъ maĭ mꙋлte pъdъчinĭ ꙋna dꙋпъ aлta, чѣa dꙋпъ ꙋpmъ вa fi tot d'aꙋ-na aчeѣaш ꙟn opĭ кape opdin se вa sкoa-te fie кape pъdъчinъ.

§. 240. Daкъ ꙟn кътimѣa padiкaлъ $\sqrt{a^n}$ esпonen-tꙋл r вa fi пpodꙋктꙋл maĭ mꙋлtop фъкътopĭ m, p, q шчл. pъdъчina чepꙋtъ se вa гъsi нapъш, кꙟnd pъdъ-чiniлe m, p, q se вop sкoate ꙋna dꙋпъ aлta (§. 238.) шi ꙟn opĭ кape opdin; daкъ ꙟnsъ r вa fi ꙋn nꙋmъp ꙟntꙟitop, pъdъчina $\sqrt[r]{a^n}$, nꙋ se пoate afлa пpin mi-жлoaчe maĭ simплe. Sпp. п. $\sqrt{16}=\sqrt{(\sqrt{16})}=\sqrt{4}=2$.

$\sqrt[6]{64}=\sqrt{(\sqrt[3]{64})}=\sqrt{4}=2$;

$\sqrt[6]{64}=\sqrt[3]{(\sqrt{64})}=\sqrt[3]{8}=2$.

§. 241. Eкꙋaцia $f=\sqrt[m]{a^n}$ pꙟdiкꙟndꙋ-se лa пꙋte-pѣa r dъ $f^r=\sqrt[m]{a^{nr}}$ (§. 237.) din кape sкoцꙟndꙋ-se нa-pъш pъdъчina r, вa fi $f=\sqrt[r]{(\sqrt[m]{a^{nr}})}=\sqrt[mr]{a^{nr}}$ (§. 238.) шi фъкꙟndꙋ-se sꙋбstitꙋцie de пpeцꙋл лꙋĭ f; $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mr]{a^{nr}}$; aшa dap пpeцꙋл кътimiĭ padiкaлe nꙋ se sкimбъ, daкъ esпonenцiĭ atꙟt aĭ semnꙋ-лꙋĭ padiкaл, кꙟt шi пꙋtepiлe de sꙋбt semnꙋ̆, se вop ꙟmпъpцi saꙋ̆ se вop ꙟmmꙋл-цi пpintp'aчeлaш nꙋmъp.

§. 242. Dintp'aчѣasta ꙋpmѣazъ къ кътimiлe pa-diкaлe se пot pedꙋчe лa maĭ simплъ esпpesie, ꙟm-

·пърцindȣ-se amиndoĭ esпonenцi прin fъкъtорȣл комȣn, че пot sъ копрinzъ. Sup. п. $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$;
$\sqrt[4]{a^2 b^2} = \sqrt[4]{(ab)^2} = \sqrt{ab}$; $\sqrt[6]{a^3 b^9} = \sqrt[6]{(ab^3)^3} =$
$= ab^3$;

$$\left(\sqrt[6]{a^5}\right)^3 = \sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt{a^5}.$$

$$\sqrt[3]{(\sqrt{a^9})} = \sqrt[6]{a^9} - \sqrt{a^3}.$$

§. 243. Кътimiле paдiкале $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[p]{b^q}$, $\sqrt[r]{c^s}$, шчл. se пot peдȣче иаръш ла semne кȣ esпonenцi d'oпotpiвъ, фъръ sъ se sкimбe прецȣл лор, шi тъкар къ ачеasta se поate фаче прin mȣлte miжлoaче, прintр'ȣn пȣmър adiкъ oape каре, че se ва пȣtea ıмпърцi de esпonenцi кътimiлор paдiкале date; кȣ toate ачеstea пentpȣ simплiчitate, se ва ıntpeбȣinцa пȣmърȣл чел maĭ mik din кıte вор авеа ачеastъ пpopietate. Sъ ziчem къ ачеst пȣmър este h; ка sъ se peдȣкъ dap кътimiле paдiкале ла ачеst esпonent, sъ se ımпарцъ ачеsta прin esпonenцi fie кърȣia semпȣ, шi прin кıtȣл aфлat sъ se ımmȣлцeaskъ esпonentȣл atıt ал semпȣлȣĭ кıt шi ал кътimi de sȣбt semпȣ; прintр'ачеst miжлoк fie каре кътime paдiкалъ (дȣпъ §. 241.) пъzindȣ-se прецȣл eĭ, ва авеа esпonentȣл h. Adiкъ:

$$h:m=d \text{ dъ } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[md]{a^{nd}} = \sqrt[h]{a^{nd}}.$$

$$h:p=f \ldots \sqrt[p]{b^q} = \sqrt[pf]{b^{qf}} = \sqrt[h]{b^{qf}}$$

$$h:r=g \ldots \sqrt[r]{c^s} = \sqrt[rg]{c^{sg}} = \sqrt[h]{c^{sg}}.$$

fiind $h = md = pf = rg =$ шчл.

S. п. $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[4]{c^3}$, $\sqrt[6]{d^5}$ se пot редȣче ла $\sqrt[12]{a^6}$, $\sqrt[12]{b^8}$, $\sqrt[12]{c^9}$, $\sqrt[12]{d^{10}}$.

$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[5]{c}$ daȣ̆ $\sqrt[30]{a^{15}}$, $\sqrt[30]{b^{10}}$, $\sqrt[30]{c^6}$.

§. 244. Фіе $f=\sqrt[m]{a^n}$ ші $g=\sqrt[m]{b^r}$; аша dap $f^m=a^n$, $g^m=b^r$, ші $f^m . g^m=(fg)^m=a^n b^r$; de ȣnde ȣрмеазъ $fg=\sqrt[m]{(a^n b^r)}$, saȣ̆ пȣindȣ-se ꙟn лок de f ші g прецȣріле $\sqrt[m]{a^n}$; $\sqrt[m]{b^r}=\sqrt[m]{(a^n b^r)}$. Asemenea se поate doвedi пentpȣ tpeĭ saȣ̆ maĭ mȣлte къtimĭ padiкaле $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[m]{b^r}$, $\sqrt[m]{c^s}$ .... къ sꙟnt $\sqrt[m]{(a^n\ b^r\ c^s\ \ldots)} = \sqrt[m]{a^n}.\sqrt[m]{b^r}.\sqrt[m]{c^s}$ .... Аша dap ръдъчіna din продȣктȣл maĭ mȣлtop fъкъtopĭ este d'onotpiвъ кȣ продȣктȣл ачелораш ръдъчінĭ din fie каpe fъкъtopȣ̆.

S. п. $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$; $\sqrt[3]{2a}.\sqrt[3]{3b}=\sqrt[3]{6ab}$;

$$\sqrt{\left(2(1+x)\right)}.\sqrt{\left(a(1-x)\right)}=\sqrt{\left(2a(1-x)^2\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{6}\right)}\sqrt[3]{\left(\frac{3}{1-x}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{2(1-x)}\right)}.$$

$$\sqrt[5]{2a^2b}.\sqrt[5]{3ac^2}.\sqrt[5]{\frac{7h}{6abc}}=\sqrt[5]{7a^2ch}.$$

Dакъ fъкъtopi вор авеа deoseвiцĭ esnonenцĭ padiкaлĭ, пpin §. 243. se пot pedȣче ла ȣn esnonent комȣn, ші dȣпъ ачеа продȣктȣл лор se поate faче пpin кіпȣл че s'a аpъtat maĭ sȣs. Adiкъ:

$$\sqrt[m]{a^n}.\sqrt[p]{b^q}.\sqrt[r]{c^s}=\sqrt[mpr]{(a^{npr}.b^{mqr}.c^{mps})}.$$

S. п. $\sqrt{2a}.\sqrt{3b}=\sqrt[4]{(4a^2.3b)}=\sqrt[4]{(12a^2b)}$.

$\sqrt{(2a)}.\sqrt[3]{(2b^2)}=\sqrt[6]{(8a^3)}.\sqrt[6]{(4b^4)}=\sqrt[6]{(32a^3b^4)}$.

ꙟn sfꙟpшit_ прintр'ачѣasta se doвedeщe къ ачелаш продꙋкт ва еші, ꙟn opĭ каpe opdin se вop ꙟmmꙋлцi кътimiле padiкале; пentpꙋ къ $\sqrt[m]{a^n} . \sqrt[m]{b^r} = \sqrt[m]{(a^n b^r)}$, ші $\sqrt[m]{b^r} , \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{(b^r a^n)}$, dap $a^n b^r = b^r a^n$, de a-чеѣа ші $\sqrt[m]{a^n} . \sqrt[m]{b^r} = \sqrt[m]{b^r} \sqrt[m]{a^n}$. Ші аша se поate doвedi къ se ꙋpmѣazъ кꙋ opĭ кꙟцĭ фъкъtopĭ de a-чest фел.

§. 245. Sъ zічem къ a, b, c, ... sꙟnt нꙋmepe ꙟntꙟitoape ꙟntpe еле; Фiind къ este $\sqrt[m]{(a^n b^r c^s \ldots)} = \sqrt[m]{a^n} . \sqrt[m]{b^r} . \sqrt[m]{c^s} \ldots = a^{\frac{n}{m}} . b^{\frac{r}{m}} . c^{\frac{s}{m}} \ldots$ ръdъчina din продꙋктꙋл ачеstop фел de фъкъtopĭ ва fi рацionалъ, кꙟnd esпonentꙋл semnꙋлꙋĭ padiкал ва fi ꙟmпърцitop комꙋн tꙋtꙋлор фъкъtopiлор; ші ачest продꙋкт ва аꙗѣа atꙟtѣa ръdъчiniĭ рацionaле, кꙟцĭ ꙟmпърцitopĭ de ачest фел вор fi. Sпр. п. $a^8 b^4$ аpe a doiлѣa ші a пatpa ръdъчinъ рацionалъ. De se ва чере dap ръdъчina opĭ каpe a ꙋnꙋĭ нꙋmър oape каpe хotъpꙟt, ачел нꙋmър тревꙋе sъ se desfaкъ ꙟn фъкъtopi лꙋĭ чеĭ simплi; din каpe se ва вedѣa, dакъ ачелаш нꙋmър ꙗръш se поate пpiві ка ꙋn продꙋкт ал пꙋtepiлор, аĭ кърора esпonenцi sъ se поatъ ꙟmпърцi прin esпonentꙋл ръdъчiniĭ че se чере. Ла ачѣastъ ꙟntꙟmпларе ръdъчina ачѣasta ва fi рацionалъ, ꙗр ла о ꙟntꙟmпларе din пpotiвъ ръdъчina ва fi ipaцionалъ. Екzemпларĭ.

$\sqrt{(144)} = \sqrt{(2^4 . 3^2)} = 2^2 . 3 = 12.$

$\sqrt{(225)} = \sqrt{(3^2 . 5^2)} = 3. 5. = 15.$

$\sqrt{(20733)} = \sqrt{(2^8 . 3^4)} = 2^4 . 3^2 = 144.$

$\sqrt[4]{(20736)} = \sqrt[4]{(2^8 . 3^4)} = 2^2 . 3 = 12.$

$\sqrt[3]{(438976)} = \sqrt[3]{(2^6 . 19^3)} = 2^2 . 19 = 76.$

Toate ръдъчiнiле ачестѣа sѫnt рационале, иар $\sqrt{(210)}$ $=\sqrt{(2.\ 3.\ 5.\ 7)}$ este ipационалъ.

§. 246. Ȣneopĭ se поатe sкоate ръдъчiна пȣмаĭ dintр'ȣнȣ саȣ маĭ мȣлцĭ, иар нȣ din тоцĭ фъкътоpiĭ нȣмърȣлȣĭ пропȣs. Ла ачѣастъ ѫнтѫмпларе ръдъчiна ва fi ipационалъ, se ва пȣтѣа ѫнsъ desфаче ѫn доĭ фъкъторĭ, ȣнȣ рационал шi алтȣ ipационал. Съ зичем къ ла $\sqrt[m]{(a^n b^p)}=\sqrt[m]{a^n}\,.\sqrt[m]{b^p}$ маĭ ѫнтѫĭ $n=mr$, de ȣnde ȣрмѣазъ а fi $\sqrt[m]{a^{mr}}=a^r$. Дȣпъ ачѣаста съ не ѫнкiпȣim къ este $p>m$, фъръ ѫнsъ de a se пȣтѣа ѫмпърцi акорат p прin m, adiкъ de ва fi $p=mq+s$, (ȣnde $s>m$) ва fi шi $\sqrt[m]{b^p}=\sqrt[m]{(b^{mq+s})}=\sqrt[m]{(b^{mq}.b^s)}=b^q\sqrt[m]{b^s}$; ѫn sфѫршit $\sqrt[m]{(a^n b^p)}=a^r\,b^q\sqrt[m]{b^s}$. Ѫntр'ачест кiп кътiмiле ipационале se редȣк ла чѣа маĭ simплъ еспресie. Екземплѫрĭ:

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$; $\sqrt{a^3b}=a\sqrt{ab}$;

$\sqrt[3]{(a^4b^3)}=ab\sqrt[3]{a}$; $\sqrt{(32a^7b^3)}=4a^3b\sqrt{2ab}$;

$\sqrt[6]{(64a^9b^5c)}=2ab\sqrt[6]{(2a^4c)}$; шчл. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$;

$\sqrt[3]{432}=\sqrt[3]{(2^4\,.\,3^3)}=6\sqrt[3]{2}$;

$\sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{(3.\ 5^3)}=5\sqrt[3]{3}$; шчл.

§. 247. Прintр'ачѣастъ трансформацie кътimiле радiкале de мȣлте орĭ se фак омоцене шi нот съ se adȣне ѫнтр'ȣн терmin; прекȣm ѫn екземплȣрiле ȣрмътоаре: $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$;

$\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{81}=5\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$;

$\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}=2\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$;

$\sqrt{(12a^2b)}+\sqrt{(27b^3)}=2a\sqrt{3b}+3b\sqrt{3b}=$
$(2a+3b)\sqrt{3b}$.

§. 248. Din npoтівъ fiind къ este $a = \sqrt{(a^m)}$, ва fi ші $a\sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{a^m}\,.\sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{(a^m b^n)}$; de ѹnde ѹр-mѣazъ къ konfiчientѹл рацiонал, ал кътi-meї padiкaлe, de ва фаче тревѹinцъ, se поate' mѹta сѹбt semnѹл padiкaл, рidiкъndѹ-se ла пѹтереа esпonentѹлѹї din semnѹл padiкaл, ші ѫmmѹлцindѹ-se прin тр'ачеастъ кътimea de сѹбt semnѹ.

Snp. п. $2\sqrt{a} = \sqrt{4a}$

$$3a^2\sqrt[3]{(b+c)} = 3\sqrt[3]{\left(a^6(b+c)\right)} = \sqrt[3]{\left(27a^6(b+c)\right)};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a}{4b}\right)};\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{8.\,9}{27.\,4.}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

§. 249. De ва fi съ se sкoaцъ ръdъчiна dintр'o кътime padiкалъ, че ва авѣа konfiчient рацiонал, se ва mѹta maї ѫntъї konfiчientѹл dѹпъ semnѹл кътimi, ші se ва esпrima dѹпъ §. 238. Adiкъ:

$$\sqrt[m]{\left(a\sqrt[n]{b}\right)} = \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{(a^n\ b)}\right)} = \sqrt[mn]{a^n\ b}.\quad \text{Snp. п.}$$

$$\sqrt{\left(2a\sqrt[3]{5b}\right)} = \sqrt[6]{(2^3\,a^3\,.\,5b)} = \sqrt[6]{(40a^3b)}.$$

$$\sqrt{\left(2a\sqrt[3]{3\,(b\sqrt{5c})}\right)} = \sqrt{\left(2a\sqrt[6]{(3^2\,b^2\,.\,5c)}\right)} =$$

$$\sqrt[12]{2^6a^6\,.\,3^2\,b^2\,.\,5c)} = \sqrt[12]{(2880.\ a^6\,b^2\,c)}.$$

§. 250. Фiind $f=\sqrt[m]{a^n}$ шi $g=\sqrt[m]{b^r}$; de ȣnde $f^m=a^n$, шi $g^m=b^r$, ва fi шi $\frac{f^m}{g^m}=\left(\frac{f}{g}\right)^m=\frac{a^n}{b^r}$; dinтр'ачѣasta ȣрmѣazъ $\frac{f}{g}=\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^r}}$; saȣ̆ пȣindȣ-se ꙟn локȣл лȣĭ f шi лȣĭ g прецȣрiле лор, $\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^r}}=\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^r}}$;

ашa dap ръdъчina din кꙟtȣл a doъ кътimĭ este d'опotpiвъ кȣ цꙟtȣл ачелораш ръdъчinĭ dintp'ачеле кътimĭ; saȣ̆ ръdъчina dintp'o fpꙟнџере este d'опotpiвъ кȣ o fpꙟнџере aĭ кърia нȣмърътор шi нȣmiтор sꙟnt ръdъчinĭ asemenѣa din amꙟndoĭ терminiĭ fpꙟнџеpiĭ пропȣse.

S. п. $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$

шi din пpotiвъ: $\frac{\sqrt{(2a)}}{\sqrt{(9a)}}=\sqrt{\left(\frac{2a}{9a}\right)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$$\frac{\sqrt[3]{(4a^2b)}}{\sqrt[3]{(2ab^2)}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4a^2b}{2ab^2}\right)}=\sqrt[3]{\frac{2a}{b}}.$$

Dакъ de-ꙟmпърцitȣл шi ꙟmпърцitорȣл, saȣ̆ терmini fpꙟнџерi, вор авѣа deosебiцĭ esпonenцĭ padiкалĭ, ачѣваш регȣлъ ѕе поаte аплiка, pedȣкꙟndȣ-se semnеле amꙟndȣрора терminiлор ла esпonenцĭ d'опotpiвъ; adiкъ:

$$\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[p]{b^q}}=\frac{\sqrt[mp]{a^{np}}}{\sqrt[mp]{b^{mq}}}=\sqrt[mp]{\frac{a^{np}}{b^{mq}}}.$$

S. п. $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt[3]{4a^2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3a^3}}{\sqrt[6]{4^2a^4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{8a^3}{16a^4}\right)} =$
$\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2a}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2a}}.$

§. 251. Dakъ ȋntp'o fpȋnцepe ȣn tep-min ва fĭ paцionaл, aчesta se поate пȣne sȣбt semnȣл padikaл aл чeлȣĭ лaлt, pȋdi-kȋndȣ-se лa пȣtepѣa esпonentȣлȣĭ dintp' aчest semnȣ; пentpȣ къ find $a = \sqrt[m]{a^n}$, ва fi шi

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{b^n}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)}.$$

saȣ $\frac{\sqrt[m]{b^n}}{a} = \frac{\sqrt[m]{b^n}}{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[m]{\frac{b^n}{a^m}}$; S. п. $\frac{a}{\sqrt{a}} =$

$$\sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}; \quad \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{a^3}\right)} = \sqrt[3]{a}.$$

$$\frac{a}{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a^m}{a^n}\right)} = \sqrt[m]{(a^{m-n})};$$

$$\frac{\sqrt[3]{4a^2}}{2a} = \sqrt[3]{\left(\frac{4a^2}{8a^3}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2a}\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2a}};$$

$$\frac{2a^2}{3\sqrt[3]{4a}} = \frac{a}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{8a}{4a}\right)} = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2a}; \text{ шчл.}$$

Лa aчeste tpansfopmaцiĭ, тpeбȣe sъ se ia seama a se ȋntpeбȣinцa пȣmaĭ aчeлea пpin kape kъtimiлe padi-kaлe sъ se fakъ maĭ simплe.

§. 252. Ꙟn opĭ кape fpꙟnцepe ipaцionaлъ $\sqrt[m]{\left(\frac{a^n}{b^r}\right)}$ nꙋmъpъtopꙋл saꙋ̆ nꙋmitopꙋл se poate face paцionaл, fъpъ de a se skimba npeцꙋл fpꙟnцepi; pentpꙋ къ ꙟmmꙋлцindꙋ-se ꙟn $\frac{a^n}{b^r}$ amꙟndoĭ tepmini кꙋ a^{m-n} vom avea $\frac{a^n}{b^r}=\frac{a^m}{a^{m-n}b^r}$, de ꙋnde ꙋpmeazъ къ:

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a^n}{b^r}\right)}=\sqrt[m]{\left(\frac{a^m}{a^{m-n}\,b^r}\right)}=\frac{a}{\sqrt[m]{a^{m-n}b^r}}.$$

Asemenea, fiind $\frac{a^n}{b^r}=\frac{a^n\,b^{m-r}}{b^m}$, npin ꙟmmꙋлцipea amꙟndꙋpopa tepminiлop кꙋ b^{m-r}, va fi ші $\sqrt[m]{\left(\frac{a^n}{b^r}\right)}=\frac{\sqrt[m]{(a^n\,b^{m-r})}}{b}$.

Eкzemnлꙋpĭ.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3}{9}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{18}{27}\right)}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{2a}{b^4}\right)}=\sqrt[5]{\left(\frac{2ab}{b^5}\right)}=\frac{\sqrt[5]{2ab}}{b}.$$

§. 253. Кътimea ipaцionaлъ ꙟntpeagъ $\sqrt[m]{a^n}$ se poate skimba ꙟn fpꙟnцepe кꙋ nꙋmitopꙋл b, лꙋat dpept o кътime opĭ кape. Adiкъ va fi $\sqrt[m]{a^n}=\frac{b\sqrt[m]{a^n}}{b}$; ші mꙋtꙟnd-ꙋse fъкъtopꙋл paцionaл b dꙋnъ semnꙋ̆, $\sqrt[m]{a^n}=\frac{\sqrt[m]{(a^n\,b^m)}}{b}$. S. n. $\sqrt{5}=\frac{\sqrt{(5.\ 4)}}{2}=$

$\frac{\sqrt{(20)}}{2}$; saŭ $\sqrt[3]{5}=\frac{\sqrt[3]{(5\,.\,27)}}{3}=\frac{\sqrt[3]{135}}{3}$; шчл.

Adiкъ daкъ $\sqrt[m]{a}$ ap tpeбyi sъ se skimбe ꙟntp'o fpꙟnpe aл къpia nymitop sъ fie 10^n, nymъpyл a de sуbt semnŭ вa tpeбyi sъ se ꙟmmyлцeaskъ кy 10^{mn}, шi вa fi

$$\sqrt[m]{a}=\frac{\sqrt[m]{(a\,10^{mn})}}{10^n}\text{ S. п. }\sqrt{7}=\frac{\sqrt{(700)}}{10}=$$

$$\frac{\sqrt{(70000)}}{100}=\text{ шчл.}$$

$$\sqrt[3]{7}=\frac{\sqrt[3]{(7000)}}{10}=\frac{\sqrt[3]{(7000000)}}{100}=\text{шчл.}$$

§. 254. Фie f пpeцyл nymepiк aл кътimi padiкaлe $\sqrt[2m+1]{a}$, saŭ $f=\sqrt[2m+1]{a}$, шi $f^{2m+1}=a$. Dупъ §. 217. вa fi $(\pm f)^{2m+1}=\pm f^{2m+1}$ saŭ $(\pm f)^{2m+1}=\pm a$; de aчeea вiчe вepsa $\sqrt[2m+1]{(\pm a)}=\pm f$ saŭ $\sqrt[2m+1]{(\pm a)}=\pm\sqrt[2m+1]{(a)}$. Aшa dap ръdъчina fъpъ soцŭ (aл къpia esnonent este yn nymъp fъpъ soцŭ) opĭ este nozitiвъ, saŭ neratiвъ: nozitiвъ кꙟnd ръdъчina se вa skoate dintp'yn nymъp nozitiв, neratiв кꙟnd se вa skoate dintp'yn nymъp neratiв.

S. п. $\sqrt[3]{(-8)}=-2$; $\sqrt[3]{(-7)}=-\sqrt[3]{7}$

$\sqrt[5]{(-32a^6b)}=-2a\sqrt[5]{ab}$. шчл.

§. 255. Sъ ziчem къ $f=\sqrt[2m]{a}$, saŭ $f^{2m}=a$. Din §. 217. se doвedeщe къ este $(\pm f)^{2m}=+f^{2m}$; saŭ $(\pm f)^{2m}=a$; aшa dap вiчe вepsa $\sqrt[2m]{a}=\pm f$. Saŭ ръdъчina кy soцŭ, (aл къpia esnonent este ѕn нѕmър кѕ soцѕ) a ѕнѕї нѕmър орї-каре аре ↑ndoit прец, ѕнѕ пozitiв, алтѕ нeгatiв. Sпр. п. $\sqrt{4}=\pm 2$; $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)}=\pm\frac{2}{3}$; $\sqrt[4]{(625)}=\pm 5$.

$\sqrt{7}=\pm\sqrt{7}$; $\sqrt[6]{(64a^7b)}=\pm 2a\sqrt[6]{ab}$. шчл.

§. 256. Dакъ нѕmърѕл нeгatiв $-a$ ва авеа вре о ръdъчinъ adeвъратъ кѕ soцѕ, ачеа ръdъчinъ поate fi орї пozitiвъ орї нeгatiвъ. Sъ нe ↑нкіпѕim dap $\sqrt[2m]{-a}=\pm f$. Фiind къ ↑nsъ нѕmърѕл at↑t пozitiв к↑t ші нeгatiв, нѕmaї afipmatiве пѕтерї поate авеа кѕ soцѕ, нѕ se поate sъ fie $(\pm f)^{2m}=-a$; de ачеа ші екѕацiа $\sqrt[2m]{-a}=+f$ нѕ поate sъ fie adeвъратъ, adeкъ fiind къ ѕn нѕmър нeгatiв нѕ поate sъ аїбъ ръdъчinъ кѕ soцѕ adeвъратъ, esпресiiле de ачеastъ форmъ $\sqrt[2m]{-a}$, ла каре калкѕлѕл ese к↑te odatъ, se нѕmeskѕ ръdъчinї imaцinapiї; челе-л-алte ↑nsъ ръdъчinї $\sqrt[2m]{a}$, ші $\sqrt[2m+1]{\pm a}$ s↑nt adeвъpate.

§. 257. К↑nd ръdъчina imaцinapie ва fi sъ se р↑dіче ла о пѕтере кѕ soцѕ, atѕнчї am↑ndoї esпoneнцi, at↑t ал semнѕлѕї padiкал, к↑t ші ал пѕтерї че se чере, maї nainte de a se faче лѕкрареа, требѕе sъ se ↑mпарцъ кѕ ал лор ↑mпърцitop komѕн.

Екzemплѕрї:

$$(\sqrt{-a})^2=(a)^{\frac{2}{2}}=-a,$$

$$(\sqrt[4]{-a})^4=(-a)^{\frac{4}{4}}=-a,$$

ші de обще $(\sqrt[2m]{-a})^{2m} = (-a)^{\frac{2m}{2m}} = -a$.

Dȣпъ ачеasta: $(\sqrt[6]{-a})^{10} = \sqrt[3]{(-a)^5} = -a\sqrt[3]{a^2}$,

$(\sqrt[12]{-a})^{10} = \sqrt[6]{(-a)^5} = \sqrt[6]{-a^5}$,

$(\sqrt[10]{-a})^{12} = \sqrt[5]{(-a)^6} = a\sqrt[5]{a}$.

§. 258. Iар dакъ ръdъчina imaџinapie se ва рѣdiка ла о пȣтере fъръ soцȣ, ачеasta ва fi ѣаръш о къtime imaџinapie.

Пentрȣ къ $(\sqrt[2m]{-a})^{2n+1} = \sqrt[2m]{(-a)^{2n+1}} = \sqrt[2m]{-a^{2n+1}}$.

Sпр. п. $(\sqrt{-1})_3 = \sqrt{(-1)^3} = -1 . \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

$\left(\sqrt{(-3)}\right)^3 = \sqrt{(-3)^3} = -3\sqrt{-3}$.

$(\sqrt[6]{-2a})^3 = \sqrt[6]{(-2a)^3} = \sqrt{-2a}$.

§. 259. Фiind къ este $\sqrt{-a} = \sqrt{a} . \sqrt{-1}$, ші $\sqrt{-b} = \sqrt{b} . \sqrt{-1}$, ва fi ші
$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} . (\sqrt{-1})^2 = -\sqrt{ab}$.
Asemenеа se гъsesк продȣктеле ші а маї мȣлтор ръdъчinї imaџinapiї.

§. 260. Екzempлȣpї de калкȣл кȣ кътimї padiкале.

Ꙟmmȣлцipea

I. $(4+3\sqrt{5})(7-2\sqrt{5}) = 28+13\sqrt{5}-30 =$
$13\sqrt{5}-2$.

II. $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}) = 12+5\sqrt{6}-18 =$
$5\sqrt{6}-6 = (5-\sqrt{6})\sqrt{6}$.

III. $(3\sqrt{5}-2\sqrt{6})(7\sqrt{3}-2\sqrt{10})$

$$=21\sqrt{15}-14\sqrt{18}-6\sqrt{50}+4\sqrt{60},$$
$$=21\sqrt{15}-42\sqrt{2}-30\sqrt{2}+8\sqrt{15},$$
$$=29\sqrt{15}-72\sqrt{2}.$$

IV. $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$

$$=\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{8},$$
$$=3-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}+2,$$
$$=5-\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}.$$

V. $(\sqrt{a}+3\sqrt{2b}-2\sqrt{6c})(\sqrt{a}-2\sqrt{2b}+3\sqrt{6c})=$
$$a-12b-36c+\sqrt{2ab}+\sqrt{6ac}+26\sqrt{3bc}.$$

Ꙟmпърцiрea.

I. $(2\sqrt[3]{a^2}-7\sqrt[3]{ab}-15\sqrt[3]{b^2}):(\sqrt[3]{a}-5\sqrt[3]{b})=$

$$2\sqrt[3]{a^2}-10\sqrt[3]{ab} \qquad\qquad 2\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}$$
$$-\qquad +$$
$$3\sqrt[3]{ab}-15\sqrt[3]{b^2}$$
$$3\sqrt[3]{ab}-15\sqrt[3]{b^2}$$
$$-\qquad +$$
$$0$$

II. $(12-6\sqrt{6}+6\sqrt{15}-9\sqrt{10}):(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})=$

$$12-6\sqrt{6} \qquad\qquad 2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$$
$$-\qquad +$$
$$0 \qquad 6\sqrt{15}-9\sqrt{10}$$
$$6\sqrt{15}-9\sqrt{10}$$
$$-\qquad +$$
$$0$$

§. 261. Nѹmitopѹл fpɪnцepi paцionaлe $\frac{N}{A\pm\sqrt{B}}$ se поate pedѹчe, fъpъ de a se skimба пpeцѹл fpɪnцepii, daкъ amɪndoĭ tepmini aчeщiĭ fpɪnцepĭ se вop ɪmmѹлцi кѹ $A\mp\sqrt{B}$, пentpѹ къ $(A\pm\sqrt{B})(A\mp\sqrt{B})=A^2-B$.

Ekzemплѹpĭ.

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}.$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{(5-1)}(\sqrt{5}+1)}=\frac{6+2\sqrt{5}}{5-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{(x^2-1)}}=\frac{x-\sqrt{(x^2-1)}}{x^2-(x^2-1)}=x-\sqrt{(x^2-1)}.$$

Asemenea se pɪdiкъ ipaцionaлitatea шi ɪn nѹmitopѹл fpɪnцepi $\frac{N}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$, daкъ amɪndoĭ tepmini aчeщiĭ fpɪnцepĭ se вop ɪmmѹлцi пpin $\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$, шi atѹnчĭ ва fi:

$$\frac{N}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{N(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}.$$

Ekzemплѹpĭ.

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2}=5-2\sqrt{6}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{(x-1)}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{(x-1)}}{x-(x-1)}=\sqrt{x}+\sqrt{(x-1)}.$$

§. 262. Пpin §. 232. se demonstpeaзъ къ este $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$; adiкъ semnѹл padiкaл se поate лъпъda, daкъ esпonentѹл кътimi sѹбt semnѹ se ва ɪmпъpцi пpin semnѹл padiкaл. Aчeaш se поate fache шi ла пѹtepiлe че aѹ esпonenцi negatiвĭ; пentpѹ къ $\sqrt[m]{(a^{-n})}=$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1}{a^n}\right)} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}.$$

De ačєa de обще ва fi $\sqrt[m]{(a^{\pm n})} = a^{\pm\frac{n}{m}}$.

Dap $a^{\pm\frac{n}{m}} = (a^{\pm n})^{\frac{1}{m}}$ (§. 211.); adікъ a se рıdікa o кътіme oapе каре ла пȣтеpєa $\frac{1}{m}$, ва съ zікъ съ se sкoaцъ ръdъчіna m dintр'ачєastъ кътіme.

§. 263. Ачєasta fiind awa ȣрmєazъ.

I. $\left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^{r} = a^{\pm\frac{nr}{mr}}$

II. $\left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^{r} = a^{\pm\frac{nr}{mr}} \;\Big\|\; \left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^{-r} = a^{\mp\frac{nr}{m}}$

III. $\left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^{\frac{1}{s}} = a^{\pm\frac{n}{ms}} \;\Big\|\; \left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^{-\frac{1}{s}} = a^{\mp\frac{n}{ms}}$

IV. $\left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\pm\frac{nr}{ms}} \;\Big\|\; \left(a^{\pm\frac{n}{m}}\right)^{-\frac{r}{s}} = a^{\mp\frac{nr}{ms}}$

V. $a^{\pm\frac{n}{m}} \times a^{\pm\frac{r}{s}} = a^{\pm\frac{n}{m}\pm\frac{r}{s}} = a^{\frac{\pm ns \pm mr}{ms}}.$

VI. $a^{\pm\frac{n}{m}} : a^{\pm\frac{r}{s}} = a^{\pm\frac{n}{m}\mp\frac{r}{s}} = a^{\frac{\pm ns \mp mr}{ms}}$

§. 264. Екzemплȣрі de калкȣл кȣ esпonenці ꙟn форmъ de фрꙟнцере.

I. $$\frac{6a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{2}}\, c \cdot 5a^{-\frac{3}{4}}\, b^{\frac{2}{3}}\, c^{\frac{1}{3}}}{45a^{-\frac{1}{6}}\, b^{\frac{5}{6}}\, c^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{30}{45}\cdot a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}\cdot c^{1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{4}}.b^{2}.c^{0}=\frac{2b^{2}}{3a^{\frac{1}{4}}}.$$

$$\text{II.}\left(2a^{\frac{2}{3}}-3b^{\frac{2}{3}}\right)\left(5a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$10a^{\frac{7}{6}}+4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}-15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}-6b^{\frac{7}{6}};$$

$$\text{III.}\ (a-b):(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})=a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}.$$

$$\begin{array}{l}
a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\\
-\quad+\\
\hline
\qquad a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-b\\
\qquad a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\\
\qquad -\qquad +\\
\hline
\qquad\qquad a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-b\\
\qquad\qquad a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}-b\\
\qquad\qquad -\qquad +\\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

§. 265. Kѫte odatъ калкȣлȣл dȣче шi ла ȣнеле къtimĭ padiкале de ачеаstъ fopmъ $\sqrt[\pm\frac{n}{m}]{a^{r}}$, ла каре semнеле padiкале аȣ dpept esпonent o fpѫнцepe. Прецȣл лор лesne se deskопepe прin §. 241. adiкъ, dакъ atѫt esпonenцiĭ semнȣлȣĭ padiкал, кѫt шi esпonentȣл de sȣbt semнȣ, se ва ѫmmȣлцi прin нȣmitopȣл

$\pm m$, ва еші $\sqrt[\frac{n}{m}]{a^r} = \sqrt[n]{a^{mr}}$; ші $\sqrt[-\frac{n}{m}]{a^r} = \sqrt[n]{a^{-mr}} = \frac{1}{a^{mr}}$ $= \frac{1}{\sqrt[n]{a^{mr}}}$. Dакъ ла ачеаstъ префачере esпonentȣл semnȣлȣї padiкaл ва fi d'опотрівъ кȣ ȣnimea, atȣnчї semnȣл se щерџе, пentpȣ къ прекȣm $a^1=a$, аша ші $\sqrt[1]{a}=a$

Екzemплȣрї.

$\sqrt[\frac{2}{3}]{a} = \sqrt[2]{a^3} = a\sqrt{a}$.

$\sqrt[\frac{1}{2}]{a} = \sqrt[1]{a^2} = a^2$; $\sqrt[-\frac{3}{2}]{a} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

de ȣnde ȣрмеазъ a fi ші $\sqrt[\pm\frac{n}{m}]{a^r} = a^{\pm\frac{mr}{n}}$.

§. 366. Ꙟn §. 245 s'a арътat, кȣm se поate skoate dintp'o кътime inкомплексъ ръдъчінъ раціоналъ, dакъ ачеа кътime поate da вре ȣna de ачеst feл. Ачеаш регȣлъ se поate ȣрма ші кȣ кътimї комплексe, кѫnd ачестеа se вор пȣтеа desfаче ꙟn fъкъторії лор чеї simплі. Adiкъ Sпр. п. fiind къ este
$a^6 - 2a^5x + a^4x^2 = a^4(a^2 - 2ax + x^2) = a^4(a-x)^2$; ва fi ші $\sqrt{(a^6 - 2a^5x + a^4x^2)} = \sqrt{a^4(a-x)^2} = a^2(a-x)$, ачеастъ ръдъчінъ este раціоналъ; de se ва чере ꙟnsъ ръдъчіна a тpea a кътimі $24a^4 - 16a^3x = 8a^3(3a-2x)$, ачеаста ва fi $\sqrt[3]{8a^3(3a-2x)} = 2a\sqrt[3]{(3a-2x)}$, каре ва съ zікъ ачеастъ ръдъчінъ este іраціоналъ, пentpȣ къ $3a-2x$ нȣ коnpinde ꙟn sine ръдъчіна a тpea. Фiind къ ꙟnsъ маї de мȣлте opї ачеастъ desfачере ꙟn fъкъторї simплі este маї anевое, se ва арътa ȣn metod, прin каре ръдъчінілe кътimілор комплексe se пот

afла printр'алt miжлок че нȣ нȣ atꙟрнъ dела desfaче-рѣа ꙟn fъкъtорї.

§. 267. Dȣпъ §. 219. пътратȣл біномȣлȣї $A+B$ este компȣs din пътратȣл терminȣлȣї челȣї dintꙟї, saȣ A^2; din продȣктȣл ꙟndoit ал терminȣлȣї dintꙟї кȣ чел d'ал doiлѣа, saȣ $2AB$; шi din пътратȣл терminȣлȣї ал doiлѣа, saȣ B^2. Аша dар кътimѣа комплексъ, компȣsъ de ачeste треї пърцї, ва fi пȣтерѣа adoa a ȣнȣї біnom, каре se ва гъsi ꙟntр'ачest кіп. Dакъ Snр. п. se ва чере a se skoate ръdъчіna adoa, adiкъ пътратъ, din $f^2a^{2m}+2fga^mx^n+g^2x^{2n}=Q$, sъ se ашeze терminiї ачещiї кътimї dȣпъ пȣтерѣа ȣнеї nехотъртꙟte, dȣпъ ачеѣа

1) Sъ se skoaцъ ръdъчіna adoa din терminȣл чел dintꙟї, ка sъ se гъsѣaskъ партѣа ꙟntꙟї a ръdъчіnі черȣte, $A=\sqrt{f^2a^{2m}}=fa^m$.

2) Пътратȣл ачещiї d'ꙟntꙟї пърцї $A^2=f^2a^{2m}$ sъ se skoaцъ din кътimѣа Q, шi ръмъшiца $2fga^mx^n+g^2x^{2n}$ sъ o нȣmim ꙟn преsкȣрtаре R.

3) Dȣпъ че se ва гъsi партѣа ꙟntꙟї a ръdъчіnі, sъ se ꙟmmȣлцѣaskъ кȣ 2, шi кȣ продȣктȣл $2A=2fa^m$ sъ se ꙟmпарцъ терminȣл чел d'ꙟntꙟї ал ръdъчіnі R, ка sъ se гъsѣaskъ шi чеѣа-л-алтъ парте a ръdъчіnі черȣte, adiкъ $B=2fga^mx^n:2fa^m=gx^n$.

4) Dȣпъ че se ва ꙟndoi партѣа d'ꙟntꙟї, se ва ꙟmmȣлцi кȣ a doъa парте че se ва fi гъsit B, ка sъ se гъsѣaskъ продȣктȣл лор ꙟndoit $2AB=2fa^m\times gx^n=2fga^mx^n$, каре skъzꙟndȣ-se din ръмъшiцъ, ва ръмꙟнѣа терminȣл g^nx^{2n}.

5) Ꙟn sfꙟршit se ва forma пътратȣл de партѣа a doъa a ръdъчіnі, $B^2=g^2x^{2n}$, каре skъzꙟndȣ-se se щерџe шi челъ-л-алт терmin. Фiind къ dар кътimѣа Q копрinde пъ кꙟte треї терmini че s'aȣ аръtat ла

ꙟчепꙋtꙋл ачеstꙋї параграf; se doведеще къ ачеа кътime este пътраtꙋл вinomꙋлꙋї fa^m+gx^n; шi аша ачеаsta este ръдъчina черꙋтъ а кътimi Q.

§. 268. Amꙟndoъ skъdepiле ꙟn №. 4 шi 5 §. 267. se пot faче maї леsne кꙋ o sinгꙋръ skъdepe пentpꙋ къ fiind $2AB+B^2=(2A+B)B$, sъ se adaoџе ла ꙟndoitъ партеа dintꙋї а ръдъчini партеа а doа, sꙋma $2fa^m+gx^n$ sъ se ꙟmmꙋлцеаskъ кꙋ партеа adoа gx^n, шi din ръmъшiџа R sъ se skazъ пpodꙋktꙋл $2fga^mx^n+g^2x^{2n}$.

Форma ꙋpmъtoape арatъ toatъ лꙋкрареа калкꙋлꙋлꙋї ла skoatepеа ръдъчini пъtpate.

$$\sqrt{f^2a^{2m}+2fga^mx^n+g^2x^{2n}} = fa^m+gx^n.$$

$$\begin{array}{rccc}
A^2= & \pm f^2a^{2m} & & \\
\hline
 & 0 & +2fga^mx^n & +g^2x^{2n} \\
(2A+B)B= & & +2fga^mx^n & +g^2x^{2n} \\
 & & - & - \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{f^2a^{2m}} = fa^m \\
2A &= 2fa^m \\
B &= 2fga^mx^n : 2fa^m = gx^n.
\end{aligned}$$

Алt екzemплꙋ:

$$\sqrt{\left(\frac{4a^2}{25}-\frac{6ax^2}{5b}+\frac{9x^4}{4b^2}\right)}=\frac{2a}{5}-\frac{3x^2}{2b}$$

$$\begin{array}{rccc}
A^2= & \frac{4a^2}{25} & & \\
 & - & & \\
\hline
 & 0 & -\frac{6ax^2}{5b} & +\frac{9x^4}{4b^2} \\
(2A+B)B= & & -\frac{6ax^2}{5b} & +\frac{9x^4}{4b^2} \\
 & & + & - \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

$$A=\sqrt{\frac{4a^2}{25}}=\frac{2a}{5}$$

$$2A=\frac{4a}{5}$$

$$B=-\frac{6ax^2}{5b}:\frac{4a}{5}=-\frac{3x^2}{2b}$$

$$2A+B=\frac{4a}{5}-\frac{3x^2}{2b}.$$

§. 269. Dакъ кътimea комплексъ ва fi пътратȣл ȣnȣї трinom, saȣ ал орї кърȣѩ полinom, ръdъчina a doъa a ачеstȣѩ se поate skoate ѩаръш прin формȣла $A^2+2AB+B$. Съ se каȣte ръdъчina пътратъ a кътimi $4a^2+12ab-20ac+9b^2-30bc+25c^2$, каре se aфлъ ашezатъ dȣпъ пȣтереа лȣї a. Маї ѫntѫї fie $A=\sqrt{4a^2}=2a$. Skъzѫndȣ-se $A^2=4a^2$ ва ръмѫnea кътimea $12ab-20ac+9b-30bc+25c^2$, ал къріа терminȣл dintѫї $12ab$ ѫмпърцindȣ-se прin $2A=4a$, ва da $12ab:4a=3b=B$, saȣ чеа-л-алтъ парте a ръdъчini. Dȣпъ ачеа ва fi $2A+B=4a+3b$, ші $(2A+B)B=12ab+9b^2$, каре продȣкт skъzѫndȣ-se din ръмъшiца dintѫї ва ръмѫnea $-20ac-30bc+25c^2$.

Фie акȣм чеде доъ пърцї афлате, saȣ $2a+3b=A'$, ші съ se каȣte a треіа парте B'. Dȣпъ формȣла §. 219. ва fi $(2a+3b+B')^2=(A'+B')^2=A'A'+2A'B'+B'B'$. Dар ѫn операцiа de маї nainte s'а skъzȣt $A'A'=(2a+3b)^2$ ші ѫn ръмъшiца $-20ac-30bc+25c^2$ требȣе съ se копрinзъ ѫnкъ термini $2A'B'+B'B'$, saȣ продȣктȣл $(2A'+B')B'$. Аша dар съ se ѫndoeaskъ $A'=2a+3b$, ші прin терminȣл чел d'ѫntѫї ал продȣктȣлȣї $2A'=4a+6b$ съ se ѫmпарцъ терminȣл чел d'ѫntѫї ал ръмъшiцеї, ка съ se гъseaskъ B'. Калкꙋлꙋл ва da $- 20ac : 4a = -5c = B'$, ші ачеаста este партеа а треа а ръдъчіні. Sꙋма $2A' + B' = 4a + 6b - 5c$ съ se ꙟмꙋлцеаскъ кꙋ $B' = -5c$, ші продꙋктꙋл $(2A' + B')B' = -20ac - 30bc + 25c^2$ съ se skazъ din ръмъшіца преceдентъ. Фііnd къ терminiї se щерг, кътімеа este ꙋn пътрат деплін ал ачещії ръдъчіні $= 2a + 3b - 5c$.

Лꙋкрареа калкꙋлꙋлꙋї:

$$\begin{array}{llllll}
 & \sqrt{(4a^2+12ab-20ac+9b^2-30bc+25c^2)} & & & & \\
A^2 = & 4a^2 & & & & = 2a + 3b - 5c. \\
 & - & & & & \\
\hline
 & 0 \quad 12ab - 20ac + 9b^2 - 30bc + 25c^2. & & & & \\
(2A+B) = & 12ab \quad + 9b^2 & & & & \\
 & - \quad\quad - & & & & \\
\hline
 & -20ac - 30bc + 25c^2 & & & & \\
(2A'+B')B' = & -20ac - 30bc + 25c^2. & & & & \\
 & + \quad + \quad - & & & & \\
\hline
 & 0 & & & &
\end{array}$$

$A = \sqrt{4a^2} = 2a$	$A' = 2a + 3b.$
$2A = 4a$	$2A' = 4a + 6b.$
$B = 12ab : 4a = 3b$	$B' = -20ac : 4a = -5c.$
$2A + B = 4a + 3b$	$2A' + B' = 4a + 6b - 5c.$

Алт екземплȣ:

$$\sqrt{\left(\frac{4a^4}{9}-2a^3x+\frac{269a^2x^2}{84}-\frac{15ax^3}{7}+\frac{25x^4}{49}\right)}=\frac{2a^2}{3}-\frac{3ax}{2}+\frac{5x^2}{7}$$

$$A^2=\frac{4a^4}{9}$$

$$0\quad -2a^3x+\frac{269a^2x^2}{84}$$

$$(2A+B)B=-2a^3x+\frac{9a^2x^2}{4}$$

$$-\qquad -$$

$$\frac{20a^2x^2}{21}-\frac{15ax^3}{7}+\frac{25x^4}{49}$$

$$(2A'+B')B'=\frac{20a^2x^2}{21}-\frac{15ax^3}{7}+\frac{25x^4}{49}$$

$$-\qquad +\qquad -$$

$$0$$

$$A = \sqrt{\frac{4a^4}{9}} = \frac{2a^2}{3}$$

$$2A = \frac{4a^2}{3}$$

$$B = -2a^3x : \frac{4a^2}{3} = -\frac{3ax}{3}$$

$$2A + B = \frac{4a^2}{3} - \frac{3ax}{2}.$$

$$A' = \frac{2a^2}{3} - \frac{3ax}{2}$$

$$2A' = \frac{4a^2}{3} - 3ax.$$

$$B' = \frac{20a^2x^2}{21} : \frac{4a^2}{3} = \frac{5x^2}{7}.$$

$$2A' + B' = \frac{4a^2}{3} - 3ax + \frac{5x^2}{7}.$$

§. 270. De opĭ кѫte пърцĭ dap ва fi компȣсъ ръdъчina, ачеле пърцĭ se вор пȣtea гъsi прin miжлокȣл аpътat ѫn §. 269; шi dakъ кътimea, a кърia ръdъчinъ se чере, ва fi ȣn пътpat deплin, ла sfѫршitȣл калкȣлȣĭ нȣ ва еші нічĭ о ръмъшіцъ. Dakъ ѫнсъ тepmiнi че требȣе a se skъdea, кѫцĭ s'aȣ̆ аpътat ла §. 269. нȣ вор кonpinde пъ tokma кътimea пропȣсъ, atȣнчĭ ачеа кътime нȣ ва fi пътpat deплin, шi нȣ ва авеа ръdъчina a doa paционалъ. De se ва аплiка metodȣл de maĭ sȣs ла кътimiле de ачест feл пentpȣ a skoate ачеаstъ ръdъчinъ, atȣнчĭ dpept ръdъчinъ ва еші ȣn шip de tepmiнĭ, че se ва пȣtea ѫntinde dъпъ voinцъ, fъръ a se afла o ръdъчinъ adeвъpatъ. Пentpȣ къ de se ва pѫdika шѫpȣл aflat ла a doa пȣtepe aчeasta nx вa fi d'onotpiвъ кx кътimea пpoпxsъ, fъpъ a se adъoгa ръmъшiцa din xpmъ.

Ekzemплx.

$$\sqrt{(c^2+x)} = c + \frac{x}{2c} - \frac{x^2}{8c^3} + \frac{x^3}{16c^5} - \text{шчл.}$$

$$A^2 = c^2$$

$$\underline{-\quad}$$

$$0 \quad . \quad x$$

$$(2A+B)B = x + \frac{x^2}{4c^2}$$

$$\underline{-\quad -}$$

$$-\frac{x^2}{4c^2}$$

$$(2A'+B')B' = -\frac{x^2}{4c^2} - \frac{x^3}{8c^4} + \frac{x^4}{64c^6}$$

$$\underline{+ \qquad + \qquad -}$$

$$\frac{x^3}{8c^4} - \frac{x^4}{64c^6}.$$

$$(2A''+B'')B'' \qquad \frac{x^3}{8c^4} + \frac{x^4}{16c^6} - \frac{x^5}{64c^8} + \frac{x^6}{256c^9}$$

$$\underline{- \qquad - \qquad + \qquad -}$$

$$-\frac{5x^4}{64c^6} + \frac{x^5}{64c^8} - \frac{x^6}{256c^9}.\ \text{шчл.}$$

$A = \sqrt{c^2} = c$	$A' = c + \frac{x}{2c}$
$2A = 2c$	$A = 2c + \frac{x}{c}$
$B = x : 2c = \frac{x}{2c}$	$B' = -\frac{x^2}{4c^2} : 2c = -\frac{x^2}{8c^3}$
$2A + B = 2c + \frac{x}{2c}$	$2A' + B' = 2c + \frac{x}{c} - \frac{x^2}{8c^3}$

$$A'' = c + \frac{x}{2c} - \frac{x^2}{8c^3}.$$

$$2A'' = 2c + \frac{x}{c} - \frac{x^2}{4c^3}.$$

$$B'' = \frac{x^3}{8c^4} : 2c = \frac{x^3}{16c^5}.$$

$$2A'' + B'' = 2c + \frac{x}{c} - \frac{x^2}{4c^3} + \frac{x^3}{16c^5}.$$

ꙟnt'ачest кіп se поate ꙟntinde nemърџinit sepіа terminілор.

§. 271. Ачеѣаш sepie se поate гъsi лesne пpin §. 229. Пentpȣ къ fiind $\sqrt{(c^2 + x)} = (c^2 + x)^{\frac{1}{2}}$, sъ zічem къ ꙟп fopmȣлеле ачеstȣї §. este $a = c^2$, $m = \frac{1}{2}$, ші ва fi:

$$A = (c^2)^{\frac{1}{2}} = c.$$

$$B = \frac{1}{2}.c.\frac{x}{c^2} = \frac{x}{2c}.$$

$$C = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \cdot \frac{x}{2c} \cdot \frac{x}{c^2} = -\frac{x^2}{8c^3}.$$

$$D = \frac{\frac{1}{2} - 1}{3} \cdot -\frac{x^2}{8c^3} \cdot \frac{x}{c^2} = \frac{x^3}{16c^5}.$$

$$E = \frac{\frac{1}{2} - 1}{4} \cdot \frac{x^3}{16c^5} \cdot \frac{x}{c^2} = -\frac{5x^4}{128c^7}.$$

De ачеа $\sqrt{(c^2 + x)} = c + \frac{x}{2c} - \frac{x^2}{8x^3} + \frac{x^3}{16c^5}$

$$- \frac{5x^4}{128c^7} + \text{шчл.}$$

Ші $\sqrt{(c^2 - x)} = c - \frac{x}{2c} - \frac{x^2}{8c^3} - \frac{x^3}{16c^5}$

$$- \frac{5x^4}{128c^7} - \text{шчл.}$$

dакъ semnеле нȣтерілор fъръ soцȣ але лȣї x se вор skimба.

§. 272. Ръдъчініле пътрате se пот skoate прin metodȣл §. 267. ші din нȣмере хотърѫте; прекȣм se ва ведеа din челе че ȣрмеазъ:

1) Пътрателе нȣмерілор simпле, dела 1 пѫнъ ла 10, sѫнt компȣse dintр'ȣна saȣ din доъ літере. Аша dар dакъ se ва чере ръдъчіна нȣмърȣлȣї, каре нȣ este компȣs de маї мȣлте декѫт de доъ цifре, ачеа ръдъчінъ se ва гъsi ѫn табла §. 203. Dакъ ѫnsъ ачеst нȣмър нȣ se aфла ѫntре пътрателе ачещії табле, ръдъчіна лȣї ва fi ірацiоналъ.

2) Съ se рѫdiче ръдъчініле $11 = 10 + 1$, ші $99 = 90 + 9$ dȣпъ formȣла біномȣлȣї §. 219. ла пътрат, лȣѫndȣ-se пентрȣ кътімеа d'ѫntѫї $A = 10$, $B = 1$; пентрȣ чеа d'a doiлеа $A = 90$, $B = 9$, ші ва fi:

$A^2 =$	100	I.	$A^2 =$	8100	II.
$2AB =$	20		$2AB =$	1620	
$B^2 =$	1		$B^2 =$	81	
$(11)^2 =$	122		$(99)^2 =$	9801	

De ачеа пътратȣл ръдъчіні компȣsъ din доъ цifре, копрinde орї треї (прекȣм I), saȣ патрȣ цifре (прекȣm II), іар нȣ maĭ інȣлte. Шi de se вор лȣа ꙟn бъгаре de seamъ чеĭ tpeĭ tepmeniĭ, din каре ачeste пъtpate se aфлъ комnȣse, se ва ведеа къ nічĭ o парte a пъtpatȣлȣĭ din џifpa чea maĭ desnpe stꙟnга a ръdъчini нȣ se копрinde ꙟn челе dȣпъ ȣpmъ doъ локȣрĭ desnpe dpeanta але пъtpatȣлȣĭ ръdъчini ꙟntpeџĭ; asemenea нȣ se копрinde ꙟn локȣл чел maĭ desnpe dpeanta ал пъtpatȣлȣĭ ꙟntpeг nічĭ ꙟndoit продȣktȣл amꙟndȣрора џifpелор ръdъчi.

§. 273. Аша dap de se ва чере ръdъчina пъtpatъ a вре ȣнȣĭ нȣмъp комnȣs din tpeĭ saȣ̆ din патpȣ џifpe, Snp. п. a нȣмъpȣлȣĭ 1369, sъ se ꙟmпарџъ ачest нȣмъp ꙟn doъ класe, лȣꙟndȣ-se ꙟn класа чea maĭ desnpe dpeanta doъ џifpe (класа чea maĭ desnpe stꙟнга ва копрinde нȣmaĭ o џifpъ, кꙟnd нȣмъpȣл ва авea нȣmaĭ tpeĭ џifpe).

$$\sqrt{13|69} = 30 + 7 = 37$$

$$\begin{array}{rr|l}
A^2 = & 900 & \\
\hline
 & 469 & A = 30,\ 2A = 60 \\
2AB = & 420 & \\
\hline
 & 49 & B = 469 : 60 = 7 \\
B^2 = & 49 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Класа чea desnpe stꙟнга ва fi opĭ ȣн пъtpat saȣ̆ нȣ. Ла ꙟnтꙟmпларea чea d'ꙟntꙟĭ ръdъчina eĭ ва fi џifpa чea d'ꙟntꙟĭ a ръdъчini че se чере; ла чеа-л-алтъ ꙟntꙟmпларe sъ se кaȣte npin §. 205. пъtpatȣл чел de апроапе maĭ mik, прекȣm 9 ла екzemnлȣл de maĭ sȣs, ръdъчina 3 a ачestȣĭ екzemnлȣ ва fi џifpa чea d'ꙟntꙟi a ръdъчini че se чере, saȣ̆ партea чea d'ꙟntꙟĭ a eĭ $A = 30$. Sъ se skazъ dȣпъ ачea пъtpatал ачеџiĭ пърџĭ $A^2 = 900$

din нȣмърȣл dat. ші ръмъшꙟца 469 съ se ꙟмпарцъ прin ꙟndoitъ партea aфлатъ a ръdъчinі, saȣ̆ прin $2A=60$, кꙟтȣл ва da партea a doa a ръdъчinі че se чере, saȣ̆ $B=469:60=7$. Акȣm съ se ꙟмтȣлцеаskъ ꙟndoitъ партea чea d'ꙟntꙟĭ printр'ачeastъ de ал doiлea. ка съ se гъsеаskъ ꙟndoit продȣктȣл amꙟndȣрора пърцiлор saȣ̆ $2AB=240$, каре skъzꙟndȣ-se din ръмъшiца 409, ва ръмꙟнea 49. Ꙟn sфꙟршit съ se skazъ пътратȣл пърцiĭ a doĭлea a ръdъчinеĭ, saȣ̆ $B=49$; fiind къ ла ачeastъ skъdере кътiмiле se щергȣ̆, нȣмърȣл 1369 este ȣn пътрат deплin, ші $\sqrt{1369}=37$.

§. 274. Amꙟndoъ skъdеріле $2AB$ ші B^2 se пот sъвꙟрші прin'тр'ȣna sinгȣръ, пentрȣ къ $2AB+B^2=(2A+B)B$.

$$\sqrt{13|69}=30+7=37$$

$$\begin{array}{rr|l}
A^2= & 900 & \\
\hline
 & 469 & A=30,\ 2A=60 \\
(2A+B)B= & 469 & B=469:60=7 \\
\hline
 & 0 & 2A+B=60+7=67
\end{array}$$

Adiкъ dȣпъ че se ва aфла adoiлea парте a ръdъчinеĭ, $B=7$, se ва adъoга ачeasta ла ꙟndoitъ партea чea d'ꙟntꙟĭ; sȣma $2A+B=60+7=67$ se ва ꙟмтȣлцi кȣ партea adoъa. ші продȣктȣл $(2A+B)B=67\times7=469$ se ва skъdea din ръмъшiца d'ꙟntꙟĭ; ачest калкȣл se apaтъ ꙟn форма de маĭ sȣs.

§. 275. Фiind къ ꙟn sistema deкadiкъ прецȣл цiфрелор se determinеazъ прin локȣл че цin еле despre ȣnime, калкȣлȣл ла skъdерea ръdъчinі se поate faче маĭ simплȣ, dакъ se вор щерце нȣлеле, каре se пȣn spре dреапta терминiлор A^2, $2AB$, ші B^2, ші se вор ашъza цiфреле ла локȣл че лi se кȣвiне.

$$\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{13|69}=37 & \\
A^2 = & 9 & \\
\hline
 & 469 & A=3,\ 2A=6 \\
(2A+B) = & 469 & B=46:6=7 \\
\hline
 & 0 & 2A+B=67
\end{array}$$

Adikъ ꙟn ekzemплꙋл d'ꙟntꙟĭ sъ se пꙋe $A=3$, sъ se skazъ $A^2=9$ din кลasa d'ꙟntꙟĭ, ші лa difepenцa 4 sъ se adaoџe кลasa a doъa 69. Акꙋm ва fi $2A=6$; dap fiind къ лa aчest tepmin s'a лeпъdat пꙋлa, ꙟn pъmъшiцa 469 se poate iаръш лeпъda цifpa despe dpeanta 9, ші пꙋmaĭ цifpeлe чe maĭ pъmꙟn 46 tpeбꙋe a se ꙟmпъpцi прin 6, ка sъ se гъseaskъ $B=46:6=7$. Aчeastъ-л-aлtъ цifpъ a pъdъчini sъ se adaoџe dea dpeanta чeлiĭ d'ꙟntꙟĭ ꙟndoitъ цifpъ, ка sъ se гъseaskъ $2A+B=67$. Чea-л-aлtъ лꙋкpape пꙋ se deosiбeшe de чea d'ꙟntꙟĭ.

Aлte ekzemплꙋpĭ.

$$\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{8|41}=29 & \\
A^2 = & 4 & \\
\hline
 & 441 & A=2,\ 2A=4 \\
(2A+B)B = & 441 & B=44:4=9 \\
\hline
 & 0 & 2A+B=49
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{56|25}=75 & \\
A^2 = & 49 & \\
\hline
 & 7\,25 & A=7,\ 2A=14 \\
(2A+B)B = & 7\,25 & B=72:14=5 \\
\hline
 & 0 & 2A+B=145
\end{array}$$

§. 276. Dакъ pъdъчiniлe 101 ші 999 se вop pꙟdiкa лa пъtpat прin fopmꙋлa бinomꙋлꙋĭ, пꙋindꙋ-se ꙟn kazꙋл d'ꙟntꙟĭ $A=100$, $B=1$, ꙟn чeлъ-л-aлt $A=990$, $B=9$ se ва гъsi.

$A^2 = 100000$	$A^2 = 980100$
$2AB = 200$	$2AB = 17820$
$B^2 = 1$	$B^2 = 81$
$(101)^2 = 10201$ (I.)	$(999)^2 = 998001$ (II.)

Аша dap пътратɤл ръdъчіnі компɤsъ din треї ці́фре ва копріnde орї чіnчї ціfре (прекɤm I.), saɤ̆ шаse (прекɤm II.), ɪар пɤ maї mɤлte; апої nічї о парте а пътратɤлɤї челор доъ d'ɪntɪї ціfре але ръdъчіnі пɤ se копріnde ɪn челе maї desпре dреапта доъ лɤкрърї а ле пътратɤлɤї ръdъчіnі ɪntреџї, nічї вре о парте а продɤктɤлɤї ɪndoit челор доъ d'ɪntɪї ціfре але ръdъчіnі кɤ чеа d'ал треілеа пɤ se afлъ ɪn локɤл чел maї desпре dреапта ал пътратɤлɤї ɪntрег. Аша dap de ва fi съ se sкаџъ ръdъчіnа а doa dintр'ɤn пɤmър че ва копріnde чіnчї saɤ̆ шаse ціfре, s. п. din пɤmърɤл 287296, se ва ɪmпърџі ачest пɤmър ɪn треї класе de ла dреапта sпре stɪnга, лɤɪndɤ-se пentрɤ fie каре класъ кɪte доъ ціfре, afаръ de чеа maї desпре stɪnга каре поате съ аїбъ ші пɤmaї о ціfръ. Dɤпъ ачеа se ва кътɤta ръdъчіnа 53 din класа чеа maї desпре stɪnга ші dintр'ачеа каре ɤрmеазъ ɪndatъ dɤпъ ачеаsta, прекɤm s'a аръtat ɪn §. 275; ла ръmъшіца 63 se ва adъога класа а треа, ші din пɤmърɤл 6396 съ se каɤte ціfра а треа а ръdъчіnії. Ɪn sfɪршіt съ se ɪа 53 dрепt партеа ɪntɪї а ачеџії ръdъчіnї, ші fiind къ ɪn калкɤлɤл de maї nainte пътратɤл ачеџії пърџї d'ɪntɪї s'a sкъzɤt, se ва кътɤta пɤmaї чеа-лалtъ парте а ръdъчіnеї. Аша dap съ se ɪа $A' = 53$ (лепъdɪndɤ-se пɤла desпре dреапта), ші прin ɪndoit пɤmърɤл ачеsta, saɤ̆ $2A' = 106$, съ se ɪmпарџъ 639 (saɤ̆ ръmъшіца лепъdɪndɤ-se ціfра чеа maї desпре dреапта 6) saɤ̆ $639 : 106 = 6 = B'$. Ɪn чеа maї dɤпъ ɤрmъ съ se fакъ продɤктɤл $(2A' + B')B' = 1066 \times 6 = 6396$, каре skъзꙟndꙋ-se din ръмъшіца d'ꙟntꙟї ачѣasta se ва щерџе, ші se гъсеще a fi $\sqrt{287296}=536$.

Форма калкꙋлꙋлꙋї.

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{28|72|96}=536 \\
A^2 = & 25 \\
\hline
 & 372 \\
(2A+B)B = & 309 \\
\hline
 & 6396 \\
(2A'+B')B' = & 6396 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$A=5,\ 2A=10$ | $A'=53,\ 2A'=106$
$B=37:10=3$ | $B'=639:106=6$
$2A+B=103$ | $2A'+B'=1066$

§. 277. De se ва чере ръdъчіна пътратъ din нꙋмърꙋл 501264, џіфра чѣа d'ꙟntꙟї a ръdъчіni ва fi 7, пътратꙋл ачещії џіфре 49 скъzꙟndꙋ-se din класа d'ꙟntꙟї, ръмъшіца ва fi ꙋнімѣа, кърia adъогꙟndꙋ-se класа a доъа, 12, se ва фаче нꙋмърꙋл 112, але кърia челе доъ d'ꙟntꙟї џіфре 11 ар требꙋі съ se ꙟмпарцъ прin ꙟndoita џіфръ d'ꙟntꙟї a ръdъчіni, saꙋ $2\times7=14$, dap fiind къ нꙋ se копрinde ꙟn 11, se ва пꙋне о нꙋлъ dpent a доъа џіфръ a ръdъчіni. Дꙋпъ ачѣа adъогꙟndꙋ-se ла нꙋмърꙋл 112 класа ꙋрмътоаре 64, se ва лꙋа 70 dpent партѣа ꙟntꙟї a ръdъчіni, ші se ва кътa џіфра a треа dꙋпъ §. 267. Adікъ:

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{50|12|64}=708. \\
A^2 = & 49 \\
\hline
 & 11264 \\
(2A'+B')B' = & 11264 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$A=7,\ 2A=14$	$A'=70,\ 2A'=140$
$B=11:14=0$	$B'=1126:140=8$
	$2A'+B'=1408.$

§. 278. Ѧntp'ачest кіп se пot skoate ръdъчіпіле пъtpate din пѹтере компѹse de шапте, saѹ опt, saѹ de opї кѫte цifpe. Nѹтърѹл se ѫmпapte ѫn клase, dела dpeanta spe stѫnга, fie`кape dintp'ачeste клase, tpeвѹe sъ копріпzъ доъ цifpe. Nѹтърѹл цifpeлop ръdъчіпі ва fi d'опotpівъ кѹ пѹтърѹл ачestop клase.

Екzeтпларї.

I. $\sqrt{5|64|06|25}=2375.$

$$
\begin{array}{rr}
A^2 = & 4 \\ \hline
 & 164 \\
(2A+B)B = & 129 \\ \hline
 & 3506 \\
(2A'+B')B' = & 3269 \\ \hline
 & 23725 \\
(2A''+B'')B'' = & 23725 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$A=2,\ 2A=4$	$A'=23,\ 2A'=46$
$B=16:4=3$	$B'=350:46=7$
$2A+B=43$	$2B'+B'=467$

$A''=237,\ 2A''=474$

$B''=2372:474=5$

$2A''+B''=4745$

II. $\sqrt{8|41|46|40|64}=29008$

$$
\begin{array}{rr}
A^2 = & 4 \\ \hline
 & 441 \\
(2A+B)B = & 441 \\ \hline
 & 464064 \\
(2A'''+B''')B''' = & 464064 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$A=2,\ 2A=4$	$A'=29,\ 2A'=58$
$B=44:4=9$	$B'=4:58=0$
$2A+B=49$	

$A''=290,\ 2A''=580$	$A'''=2900,\ 2A'''=5800$
$B''=464:580=0$	$B'''=46406:5800=8$
	$2A'''+B'''=58008$

Літеріле A, B, A', B' шчл, каре se ѫnsemnѣазъ аічї пентрꙋ desлꙋшіре, нꙋ требꙋesк ла калкꙋлаціе.

§. 279. Прін формꙋла $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ §. 221. se skoate ръдъчіна а треѣа saꙋ̆ кꙋбікъ din кътіміле компаекse. Sъ se ашеzе кътімѣа пропꙋsъ dꙋпъ пꙋтереа ꙋнеї нехотърѫте, прекꙋм $f^3a^{3m}+3f^2ga^{2m}x^n+3fg^2a^mx^{2n}+g^3x^{3n}=Q$. Dꙋпъ ачѣаsta:

1) Din терминꙋл d'ѫntѫї sъ se skoaцъ ръdъчіна а треѣа, ші ачѣаsta ва fi партѣа чѣа d'ѫntѫї а ръdъчіні че se чере, saꙋ̆ $A=\sqrt[3]{f^3a^{3m}}=fa^m$, а кърia а треѣа пꙋтере skъzѫndꙋ-se din кътімѣа Q ва ръмѫнѣа: $2f^2ga^{2m}x^n+3fg^2a^mx^{2n}+g^3x^{3n}=R$.

2) Терминꙋл чел d'ѫntѫї ал ачещїї ръмъшіцї sъ se ѫмпарцъ прін ѫntреit пътратꙋл пърцїї d'ѫntѫї а ръdъчіні afлаte, saꙋ̆ $B=3f^2ga^{2m}x^n:3f^2a^{2m}=gx^n$.

3) Sъ se ѫммꙋлцѣаskъ ачѣаstъ а doiлѣа парte кꙋ ѫntреit пътратꙋл пърці d'ѫntѫї, ка sъ авем терминꙋл $3A^2B=3f^2a^{2m}\times gx^n=3f^2ga^{2m}x^n$.

4) sъ sъ рѫdіче а doiлѣа парte а ръdъчіні ла пътрат, каре ѫммꙋлцindꙋ-se кꙋ ѫntреita парte d'ѫntѫї ва da терминꙋл $3AB^2=g^2x^{2n}\times 3fa^m=3fg^2a^mx^{2n}$.

5) Ѫn sfѫршit ла терминії формацї прін нꙋмърꙋл 3 ші 4 sъ seadaoцe кꙋбꙋл пърці а doiлѣа, saꙋ̆ $B^2=g^2x^{3n}$, ші sꙋма $S=3f^2ga^{2m}x^n+3fg^2a^mx^{2n}+g^3x^{3n}$ sъ

se скаzъ din ръмъшіца B, ші fiind къ ачесте къ-тимї R ші S se щергъ ѹна къ алта, кътимеа Q тре-бѹе съ fie ѹн кѹб депліn ал ръdъчіnі $fa^m + gx^n$ саѹ

$$\sqrt[3]{Q} = fa^m + gx^n.$$

Форма ачестѹї калкѹл.

$$\sqrt[3]{(f^3a^{3m} + 3f^2ga^{2m}x^n + 3fg^2a^mx^{2n} + g^3x^{3n})} = fa^m + gx^n.$$

$$A^3 = f^3a^{3m}$$

$$-$$

$$0 \quad 3f^2ga^{2m}x^n + 3fg^2a^mx^{2n} + g^3x^{3n}$$

$$S = 3f^2ga^{2m}x^n + 3fg^2a^mx^{2n} + g^3x^{3n}$$

$$- \quad - \quad -$$

$$0$$

$$A = \sqrt[3]{f^3c^{3m}} = fa^m$$

$$3A^2 = 3f^2a^{2m}$$

$$B = 3f^2ga^{2m}x^n : 3f^2a^{2m} = gx^n$$

$$3A^2B = 3f^2ga^{2m}x^n$$

$$3AB^2 = 3fg^2a^mx^{2n}$$

$$B^3 = g^3x^{3n}$$

Літера S ѫnseмneazъ сѹма а треї термінї $3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Алdoiлеа екzемплѹ.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{8a^6}{27} - a^4x^3 + \frac{9a^2x^6}{8} - \frac{27x^9}{64}\right)} = \frac{2a^2}{3} - \frac{3x^3}{4}.$$

$$A^3 = \frac{8a^6}{27}$$

$$-$$

$$0 - a^4x^3 + \frac{9a^2x^6}{8} - \frac{27x^9}{64}$$

$$S = -a^4x^3 + \frac{9a^2x^6}{8} - \frac{27x^9}{64}$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$0$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{8a^6}{27}} = \frac{2a^2}{3}$$

$$3A^2 = \frac{4a^4}{3}$$

$$B = -a^4x^3 : \frac{4a^4}{3} = -\frac{3x^3}{4}$$

$$3A^2B = -a^4x^3$$

$$3AB^2 = \frac{9a^2x^6}{8}$$

$$B^3 = -\frac{27x^9}{64}$$

§. 280. Dакъ ръdъчina кvбiкъ ва fi компvsъ de треї пърцї, чеʌе doъ d'ѫntѫї se вор къvtа прin кiпvʌ че s'а арътаt ѫn §. 279; Dvпъ ачеєа ачеste doъ пърцї ѫmпреvнъ se вор ʌvа dpent партєа d'ѫntѫї A а бiномvʌvї $A' + B'$, шi прintр'ачеєаш метоdъ, прin каре s'а afʌat партєа а doъа, se ва гъsi шi партєа а треєа B. S. п. dакъ se ва чере ръdina кvбiкъ а къtimi $Q = 1 - 6x + 21x^2 - 44x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6$ чеʌе doъ d'ѫntѫї пърцї аʌе ачещiї ръdъчiнї se вор гъsi а fi $1 - 2x$; dvпъ ачеєа se ва sокоti $A' = 1 - 2x$, шi fiind къ ѫn каʌкvʌvʌ прin каре s'а гъsit A', s'а sкъzvt din къtimєа Q пvтереа а треєа а ачещiї пърцї, saѵ $(A')^3 = (1 - 2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$, ръмъшiца $9x^2 - 36x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6 = R$ требvе съ копрinzъ терminiї $3(A')^2B' + 3A'(B')^2 + (B')^3$. Аша dар съ se форmeze ѫntреit пътраtvʌ пърцї чеї d'ѫntѫї, saѵ $3(A')^2 = 3(1 - 2x)^2 = 3 - 12x + 12x^2$, шi прin терminvʌ чеʌ d'ѫntѫї аʌ ачеstvї пътраt съ se ѫmпарцъ терminvʌ чеʌ d'ѫntѫї $9x^2$ аʌ ръ-мъшiцi R, ка съ se гъsєаskъ B'; saѵ $B' = 9x^2 . 3 = 3x^3$. Ѫn sfѫршit съ se форmeze терmini $3(A')^2B'$, $3A'(B')^2$, $(B')^3$ шi svmа ʌор, каре пentрv пре-sкvрtаре съ se ѫnsemneze прin ʌiтера S съ se sказъ din ръмъшiца R. Шi fiind къ ачеste къtimї R шi S se щергѵ, se dоbеdеще прintр'ачеаsta къ ръdъчiна кvбiкъ а къtimi Q este $\sqrt[3]{Q} = 1 - 2x + 3x^2$.

Форма ачестȣĭ калкȣл.

$$\sqrt[3]{(1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6)}=1-2x+3x^2.$$

$$\begin{array}{lllllllll}
A^3 & = & 1 & & & & & & \\
 & - & & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & -6x & +21x^2 & -44x^3 & & & \\
S & = & & -6x & +12x^2 & -8x^3 & & & \\
 & & & + & - & + & & & \\
\hline
 & & & & 9x^2 & -36x^3 & +63x^4 & -54x^5 & +27x^6 \\
S' & = & & & 9x^2 & -36x^3 & +63x^4 & -54x^5 & +27x^6 \\
 & & & & - & + & - & + & - \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt[3]{1} = 1\,,\ \ 3A^2 = 3 \\
B &= -6x : 3 = -2x \\
3A^2B &= -6x \\
3AB^2 &= \ \ 12x^2 \\
B^3 &= -8x^3 \\
\hline
S &= -6x + 12x^2 - 8x^3.
\end{aligned}$$

$$A' = 1 - 2x$$
$$3(A')^2 = 3 - 12x + 12x^2$$
$$B' = 9x^2 : 3 = 3x^2$$
$$3(A')^2B' = 9x^2 - 36x^3 + 36x^4$$
$$3A'(B')^2 = 27x^4 - 54x^5$$
$$(B')^3 = 27x^6$$
$$\overline{S' = 9x^2 - 36x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6.}$$

§. 281. Ачеаш metodъ ꙟntpeбȣinцꙟndȣ-se пen-tpȣ a skoate pъdъчina кȣбікъ dintp'o кътime че nȣ este ȣn кȣб deплin ва da osepie de tepminї nemъpцi-niцї, пpeкȣm se ва веdea din екzemплȣл ȣpmътop:

$$\sqrt[3]{(c^3 + x)} = c + \frac{x}{3c^2} - \frac{x^2}{9c^5} + \frac{5x^3}{81.\,c^8} \text{ шчл.}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^3 = c^3 \\ \underline{-\qquad\quad} \\ \quad 0 \quad x \\ \quad S = x + \dfrac{x^2}{3c^3} + \dfrac{x^3}{27c^6} \\ \quad \underline{\;-\quad - \qquad -\qquad\qquad} \\ \qquad\quad - \dfrac{x^2}{3c^3} - \dfrac{x^3}{27.\,c^6} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = c \\ B = \dfrac{x}{3c^2} \end{array}$$

$$S' = -\frac{x^2}{3c^3} - \frac{2x^3}{9c^6} + \frac{x^5}{81.c^{12}} - \frac{x^6}{729.\,c^{15}}$$
$$\underline{\quad + \qquad + \qquad - \qquad + \quad}$$
$$\underline{\frac{5x^3}{27.c^6} - \frac{x^5}{81.\,c^{12}} + \frac{x^6}{729.\,c^{15}}}$$

$$A' = c + \frac{x}{3c^2} \;\Big\|\; B' = -\frac{x^2}{9c^5}$$

шчл.

Акȣm de se ва лȣа $A'' = c + \frac{x}{3c^2} - \frac{x^2}{9c^5}$, ва da

$B'=\frac{5x^3}{81.c^8}$. Ші аша калкȣлȣл s'ар ȣрма петърцinit фъръ а se пȣтеа репрезеnta, прin seріа терminiлор, ръдъчina екzактъ а ачещiї кътimiї, пентрȣ къ se ва афла tot d'aȣna о ръмъшiцъ, каре ва требȣi съ se adaoџе ла кȣбȣл ръдъчiнi афлате ка съ fie ачеаста d'опotрiвъ кȣ кътimеа c^3+x.

§. 282. Ачеваш serie se поate гъsi кȣ mȣлt maї пȣцinъ ostenеалъ прin формȣлiле dела §. 229. Adікъ fiind къ este $\sqrt[3]{(c^3+x)}=(c^3+x)^{\frac{1}{3}}$, съ пȣnem ꙟntр'ачеле формȣле $a=c^3$; $m=\frac{1}{3}$, ші ва fi:

$$A=(c^3)^{\frac{1}{3}}=c$$

$$B=\frac{1}{3}.c.\frac{x}{c^3}=\frac{x}{3c^2}$$

$$C=\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\frac{x}{3c^2}\cdot\frac{x}{c^3}=-\frac{x^2}{9c^5}$$

$$D=\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\cdot\frac{x^2}{9c^5}\cdot\frac{x}{c^3}=\frac{5x^3}{81.c^8}$$

$$E=\frac{\frac{1}{3}-3}{4}\cdot\frac{5x^3}{81.c^8}\cdot\frac{x}{c^3}=-\frac{10.x^4}{243.c^{11}}$$

ші аша maї ꙟнколо; de ачеа

$$\sqrt[3]{(c^3+x)}=c+\frac{x}{3c^2}-\frac{x^2}{9c^5}+\frac{5x^3}{81.c^8}-\frac{10.x^4}{243.c^{11}}$$

Dакъ ꙟnsъ x se ва пȣне negatiв:

$$\sqrt[3]{(c^3+x)}=c-\frac{x}{3c^2}-\frac{x^2}{9c^5}-\frac{5x^3}{81.c^8}-\frac{10.x^4}{243.c^{11}}$$

шчл.

§. 283. Ка sъ se dѣа кȣвîнтȣл de кipȣл прin каре se sкoate ръdъчina a треѣа din нȣmере хотърîte dȣпъ formȣла §. 221; se вор лȣа în бъгаре de sѣамъ челе ȣрmъtoаре.

1) Кȣбȣріле нȣmерілор simпле dела 1 пînъ ла 10 sînt komпȣse de o ціfръ, saȣ de доъ, saȣ de треї iар нȣ de maї mȣлte, каре se dоведеще din таблa §. 203. Аша dар нȣmърȣл че нȣ ва fi komпȣs de maї mȣлte ціfре декîт треї нȣ ва авѣа ръdъчінъ раціоналъ, dакъ нȣ ва fi копрins întр'ачѣаstъ таблъ.

3) Dакъ нȣmеріле $11 = 10 - 1$; $22 = 20 + 2$; $99 = 90 + 9$ se вор рîdiка ла atреѣа пȣtере прin formȣла $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (§. 221.)

$$\begin{array}{rr|rr}
A^3 = & 1000 & A^3 = & 8000 \\
3A^2B = & 300 & 3A^2B = & 2400 \\
3AB^2 = & 30 & 3AB^2 = & 240 \\
B^2 = & 1 & B^3 = & 8 \\
\hline
(11)^3 = & 1331 \quad \text{(I.)} & (22)^3 = & 10648 \quad \text{(II.)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
A^3 = & 729000 \\
3A^2B = & 218700 \\
3AB^2 = & 21870 \\
B^3 = & 729 \\
\hline
(99)^3 = & 970299 \quad \text{(III.)}
\end{array}$$

De se вор лȣа în бъгаре de sѣамъ терmini, din каре se afлъ komпȣse ачеste кȣбȣрї se ва ведѣа къ: Кȣбȣл ръdъчіnі че ва fi komпȣsъ de доъ ціfре, ва авѣа орї паtрȣ ціfре (прекȣm I), орї чінчї (прекȣm II), saȣ шase (прекȣm III), iар нȣ maї mȣлte. Dȣпъ ачѣаsta se ва бъга de sѣамъ къ нічї o парte a кȣбȣлȣї din ціfра чеа maĭ despre stꙟнга a ръдъчіni нȣ se копrinde ꙟn челе treĭ локȣрĭ despre dреапta але кȣбȣлȣĭ din ръдъчіna ꙟntреагъ; nічĭ o парte ꙟаръш a ꙟntreit продȣктȣлȣĭ din пътратȣл ціfрі челiĭ despre stꙟнга a ръдъчіni кȣ чеа-л-алтъ ціfръ a eĭ нȣ se afлъ ꙟn челе доъ локȣрĭ despre dреапta але кȣбȣлȣĭ ꙟntрег: ꙟn sfꙟршit nічĭ o парte a ꙟntreit продȣктȣлȣĭ ціfрі челiĭ despre stꙟнга a ръдъчіni кȣ пътратȣл ціfрі челiĭ despre dреапta нȣ se afлъ ꙟn локȣл чел maĭ despre dреапta ал кȣбȣлȣĭ ꙟntрег.

§. 284. Adiкъ de se ва чере ръдъчіna кȣбікъ a ȣнȣĭ нȣмър компȣs de maĭ мȣлte декꙟt treĭ ціfре, ꙟnsъ de maĭ пȣціne декꙟt шапte, s. п. a нȣмърȣлȣĭ 50653.

$$\sqrt[3]{50|653} = 30 + 7 = 37$$

$$A^3 = 27\,000$$

$$23653$$

$$S = 23663$$

$$0$$

$A = 30$	$2A^2B = 18900$
$3A^2 = 2700$	$2AB^2 = 4410$
$B = 23653 : 2700 = 7$	$B^3 = 343$
	$S = 23653$

sъ se ꙟмпарцъ ачел нȣмър ꙟn доъ класе, лȣꙟnd пentрȣ чеа despre dреапta treĭ ціfре; sъ se каȣte ꙟn табла §. 203. ръдъчіna кȣбікъ a класеĭ челiĭ despre stꙟнга, saȣ dакъ ачеаsta нȣ ва fi ȣн кȣб деплiн, прекȣм 50 ꙟn екземплȣл de maĭ sȣs, sъ se каȣte ꙟntр' ачеаш таблъ кȣбȣл чел de апроапе maĭ мік 27, a кърȣеа ръдъчіna 3 ва fi ціfра чеа d'ꙟntꙟĭ a ръдъчіni черȣte; шi вом авеа $A=30$. Sъ se skazъ $A^3 = 27000$, din нȣмърȣл dat, шi ръмъшіца 23653 ꙟмпърцінdȣ-se прin $3A^2=2700$ ва da $B=7$. Акȣm съ se форmeze чеĭ треĭ терminiĭ $3A^2B$, $3AB^2$, B^3, шi сȣma лор саȣ $S=23653$ съ se скazъ din ръmъшiцъ. Ꙟn екzemплȣл ачеsta, se щерг ачеste нȣmepe, de ачеа нȣmърȣл 23653 se веde къ este ȣn кȣб deплin, шi ръdъчina кȣбiкъ a ачестȣĭ нȣmър este $=37$.

De mȣлte орĭ прецȣл чел adeвърat ал пърцi adoъа a ръdъчini, саȣ B, din ꙟntꙟiа ꙟmпърцiре a ръdъчini прin ꙟntреit пътратȣл пърцi d'ꙟntꙟĭ, саȣ прin $3A^2$ нȣ este кȣноскȣt; adeкъ ꙟn екzemплȣл de maĭ sȣs авеm кꙟtȣл $23653:2700=8$; se паре dap a fi $B=8$. Кȣ ачеastъ sȣпoziцie сȣma терminiлор $3A^2B+3AB^2+B^3$ se гъсеще a fi $=27872$, maĭ mape deкꙟt ръmъшiца 23653, de ачеа B требȣе съ se ia maĭ mik.

§. 285. Калкȣлȣл пentpȣ skoatepеа ръdъчiniĭ кȣбiче se поate фаче maĭ simплȣ de se вор лепъda нȣлеле despre dpеапta терminiлор A^3, $3A^2B$, $3AB^2$, шi de se ва esпpima прецȣл dekadid ал цifрелор din каре ачещĭ терminĭ se афлъ комнȣшĭ, прin локȣл ꙟn каре se вор sкpie despre ȣnimеа.

$$\sqrt[3]{50|653}=37$$

$$A^2=27$$

$$23\,653$$

$$S=23\,653$$

$$0$$

$$A=3 \qquad 3A^2=27 \qquad B=236:27=7$$

$$3A^2B=189$$
$$3AB^2=441$$
$$B^3=343$$
$$S=23653$$

Ꙟn екzemплȣл §. 284, ꙟn каре партеа чеа d'ꙟntꙟĭ a ръdъчini este 30, съ se ia $A=3$, лепъdꙟndȣ-se нȣла despre dpеапta, шi кȣбȣл лȣĭ $A^3=27$ съ se skazъ din клasa desпpe stꙟnгa. Ла difepenцa 23 sъ se adaoцe чеѣа-л-алтъ класъ 653, ши ръмъшiцa 23653 sъ se ꙟmпapцъ пpin $3A^2=27$. Dap fiind къ ꙟntp'ачest ꙟmпъpцitop, saȣ лепъdat doъ пȣле din dpѣanta лȣї, sъ se лепеde ши ꙟn diвident doъ пȣле, ши челе-л-алте sъ se ꙟmпapцъ пpin 27. Ꙟntp'ачest кip se гъseщe $B=236:27=7$, кape este чеѣа-л-алтъ цifpъ a ръdъчini, че tpeбȣe sъ skpie dѣa dpѣanta челiї d'ꙟntꙟї. Ла fopmaцia tepminiлop $3A^2B$, $3AB^2$ din $A=3$ ши $B=7$, s'a лепъdat desпpe dpѣanta челȣї d'ꙟntꙟї doъ пȣле, ши desпpe dpѣanta челȣї-л-алt ȣna, de ачеѣа ла adȣnape ачещї tepminї se вop aшъza пpeкȣm se vede ꙟn fopma ȣpmъtoape.

Алt екzemплȣ.

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{175|616}=56 \\
A^3 = & 125 \\
\hline
 & 50616 \\
S = & 50616 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad\Bigg\|\qquad
\begin{array}{l}
A=5,\ 3A^2=75 \\
B=506:75=6 \\
\hline
\begin{array}{rr}
A^2B = & 450 \\
AB^2 = & 540 \\
B^3 = & 216 \\
\hline
S = & 50616
\end{array}
\end{array}
$$

§. 286. Ръdъчina кȣбiкъ se поate skoate ши dintp'ȣn пȣmъp kompȣs de шапте ши maї mȣлte цifpe, dȣпъ pегȣла че s'a apъtat ꙟn §. 284, 285. Sъ se ꙟmпapцъ пȣmъpȣл, s. п. 20346417 deла dpѣanta spre stꙟnгa ꙟn клase, dꙟndȣ-se fie къpia tpeї цifpe. Клasa чеѣ maї desпpe stꙟnгa поate sъ копpinzъ doъ цifpe, saȣ пȣmaї ȣna. Ръdъчina aflatъ ва авѣа atꙟtѣa цifpe кꙟte клase вop fi, кape ва sъ zікъ tpeї ꙟntp'ачestȣ екzemплȣ. Dȣпъ ачеѣа din челе d'ꙟntꙟї doъ клase desпpe stꙟnгa sъ se кaȣte челе d'ꙟntꙟї doъ цifpe але ръdъчini (вezї fopma ȣpmъtoape), кape гъsindȣ-se se вop лȣа amꙟndoъ dpept паptѣa ꙟntꙟї a ръdъчini, saŭ $A'=27$. Фiind къ ꙟнsъ ꙟнтp'ачest калкꙋл s'a скъzꙋt din чеxe doъ класе despre stꙟнга 20|346 кꙋбꙋл лꙋĭ $A'=27$, съ se adaoџе ла diференџа 663 класа a треia 417, шi din ръмъшiџа 663417 съ sъ каꙋte џifpa a треia a ръdъчinі, saŭ B', пentpꙋ каре съ se лепеde dintp'ачeastъ ръмъшiџъ doъ џifpe despre dpeaпta 17 шi чеxe-л-алte 6634 съ se ꙟмпарџъ пpin $3(A')^2=2187$. Кꙟтꙋл ва fi $B'=3$. Акꙋм съ se fopmeze din $A'=27$ шi $B'=3$ tepmini $3(A')^2B$; $3A(B')^2$, шi $(B')^3$. Sꙋma лоp $S=663417$ скъzꙟndꙋ-se din ръмъшiџъ, se ва щерџе. De ꙋnde se ꙟнџелеџе, къ нꙋмъpꙋл пропꙋs este ꙋn кꙋб deплin шi къ ръdъчina лꙋĭ este $=273$. Ла adꙋнapea tepminiлop $3(A')^2B$, $3A(B')^2$, $(B')^3$ se вор лꙋa aminte чеxe че s'aŭ zis ла sfꙟршitꙋл §. 285.

$$\sqrt[3]{20|346|417}=273$$

$$\begin{array}{rr}
A^3 = & 8 \\ \hline
 & 12346 \\
S = & 11683 \\ \hline
 & 663417 \\
S = & 663417 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$A=2$; $3A^2=12$	$A'=27$; $3(A')^2=2187$
$B=123:12=7$	$B'=6634:1287=3.$
$3A^2B = 84$	$3(A')^2B' = 6561$
$3AB^2 = 294$	$3A(B')^2 = 729$
$B^3 = 343$	$(B')^3 = 27$
$S = 11683$	$S' = 663417$

Алt екzemплꙋ.

$$\sqrt[3]{356|400|829} = 709$$

$$\begin{array}{rl} A^3 = & 343 \\ \hline & 13400829 \\ S = & 13400829 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} A = 7;\ 3A^2 = 147 & A' = 70;\ 3(A')^2 = 14700 \\ B = 134 : 147 = 0 & B' = 134008 : 14700 = 9 \\ \cline{2-2} & 3(B')^2B' = 132300 \\ & 3A'(B')^2 = 17010 \\ & (B')^3 = 729 \\ \cline{2-2} & S = 13400829 \end{array}$$

Ал tрeiлea екzemплꙋ.

$$\sqrt[3]{18|672|899|077} = 2653$$

$$\begin{array}{rl} A^3 = & 8 \\ \hline & 10672 \\ S = & 9576 \\ \hline & 1096899 \\ S' = & 1033625 \\ \hline & 63274077 \\ S'' = & 63274077 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} A = 2;\ 3A^2 = 12 & A' = 26;\ 3(A')^2 = 2028 \\ B = 106 : 12 = 6 & B' = 10968 : 2028 = 5 \\ \hline 3A^2B = 72 & 3(A')^2B' = 10140 \\ 3AB^2 = 216 & 3A'(B')^2 = 1950 \\ B^3 = 216 & (B')^3 = 125 \\ \hline S = 9576 & S' = 1033625 \end{array}$$

$$A'' = 265;\ 3(A'')^2 = 210675$$
$$B'' = 632740 : 210675 = 3$$
$$\begin{array}{rcr} 3(A'')^2B'' & = & 632025 \\ 3A''(B'')^2 & = & 7155 \\ (B'')^3 & = & 27 \\ \hline S'' & = & 63274077 \end{array}$$

§. 287. Metoda de a sкoate рьdъчina a patра, a чinчea, a шasea, шчл., ꙟn џenерал рьdъчina n, dintр'ꙋn nꙋmър dat пpin fopmꙋлa $(A + B)^n = A^n + 2A^{n-1}B +$ шчл. (§. 225.) este asemenea кꙋ ачеea че s'a аpьtat ꙟn паpагpafеле пpечеdente пentpꙋ a doъa шi a tpeea pъdъчinъ. Ачeastъ metodъ se ꙟntpeбꙋinцeazъ maĭ кꙋ seamъ, кꙟnd esпonentꙋл pъdъчinі че se чepe ва fi nꙋmъp ꙟntꙟitop; пentpꙋ къ челе-л-алte pъdъчinĭ aĭ къpopa esпonenцĭ sꙟnt nꙋmepe коmпꙋse, se пot гъsi mꙋлt maĭ лesne пpin pъdъчinĭ maĭ simпле (§. 240.) S. п. Din nꙋmъpꙋл 20736 se sкoate pъdъчina a пatpa, dакъ se ва къꙋta maĭ ꙟntꙟĭ pъdъчina a doъa 144, шi ачestꙋĭ nꙋmъp ꙗpъш se ва къꙋta pъdъчina a doъa 12 adiкъ:

$\sqrt[4]{20736} = \sqrt{\sqrt{20736}} = \sqrt{144} = 12.$ Asemenea se ва ꙋpma шi пentpꙋ челе-л-алte:

$\sqrt[3]{148035889} = \sqrt{\sqrt[3]{148035889}} = \sqrt{529} = 23.$
Saŭ

$\sqrt[6]{148035889} = \sqrt[3]{\sqrt{148035889}} = \sqrt[3]{12167} = 23.$

Кꙋm ꙟnsъ tpeбꙋe sъ se faкъ лꙋкpapea, кꙟnd esпonentꙋл ва fi ꙋn nꙋmъp ꙟntꙟitop, se ва desлꙋшi ꙟndestꙋл nꙋmaĭ пpintp'ꙋn екzemплꙋ. Sъ чepe pъdъчina a чinчea a nꙋmъpꙋлꙋĭ 601692057. Ачeastъ пpoблemъ se desлeaгъ пpin fopmꙋлa $(A + B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^4 + 5AB^4 + B^5$ (§. 222.) dꙋпъ кꙋm ȣрmeazъ. Sъ se ꙟmпарцъ пȣmърȣл ꙟн класе, de ла dpeanta spre stꙟнга, dꙟndȣ-se fie кърia класе чinчĭ цifpe, adiкъ atꙟtea кꙟte ȣnimĭ ape esпonentȣл ръdъчini чepȣte. Ꙟn класа чea maĭ despre stꙟnга пot fi шi maĭ пȣцine цifpe. Nȣmъpȣл цifpeлop ръdъчini ва fi d'опоtpiвъ кȣ пȣmъpȣл ачestop калсe. Dȣпъ ачea sъ se кaȣte a чinчea ръdъчinъ a класеĭ челiĭ maĭ despre stꙟnга, saȣ daкъ ачеа пȣ ва fi a чinчea пȣtepe a вpe ȣnȣĭ пȣmъp simплȣ, sъ se кaȣte a чinчea пȣtepe de апроапе maĭ miкъ, пpeкȣm ꙟn екzemплȣл пpoпȣs ръdъчina 5 din пȣmъpȣл 3125 ва fi цifpa чea d'ꙟntꙟĭ a ръdъчini чepȣte, saȣ паpтea eĭ чea d'ꙟntꙟĭ $A=50$. Dap пentpȣ пpeskȣptape se леапъdъ пȣла, шi se ia $A=5$. Aкȣm sъ se skazъ $A^5=3125$ din класа d'ꙟntꙟĭ, ла difepeнцa 2891 sъ se adaoцe класа ȣpmъtoape 92057, шi пȣmъpȣл 289192057 sъ se ziкъ ръmъшiцъ. Dȣпъ ачeasta ва fi $5A^4=3125$, ꙟn каpe tepmin ꙟnsъ лipseskȣ патpȣ пȣле (пentpȣ къ $A=50$), de ачea sъ se tae шi ръmъшiцi патpȣ цifpe despre dpeanta 2057, шi челе-л-алте 28919 sъ se ꙟmпаpцъ пpin $5A^4=3125$; кꙟtȣл ва eшi $B=7$. Dȣпъ че se ва afла B se пот fopma tepmini $5A^4B$, $10A^3B^2$ шчл.... каpe ка sъ se поатъ adъога потpiвit, din пpiчina пȣлелop че sa'ȣ лепъdat, tpeбȣe sъ se aшeze asfeл, пpeкȣm se apatъ ꙟn fopma ȣpmъtoape. Daкъ sȣma ачestop tepminĭ ва eшi maĭ mape deкꙟt ръmъшiцa, пpeцȣл лȣĭ B tpeбȣe atȣnчĭ sъ se ia maĭ miк.

$$\sqrt[5]{6106|92057} = 57 \qquad A = 5;\ 5A^4 = 3125$$
$$A^5 = 3125 \qquad B = 28919 : 3125 = 7$$
$$289192057 \qquad 5A^4B = 21875$$
$$S = 289192057. \qquad 10A^3B^2 = 61250$$
$$10A^2B^3 = 85750$$
$$5AB^4 = 60025$$
$$B^5 = 16807$$
$$S = 289192057$$

§. 288. Пѫнъ aiчї s'a лꙋat ѫn бъгаре de сꙋamъ нꙋmaї ast feл de нꙋмepe ѫntpeџї але кърора ръdъчinї sѫnt paџionaлe. Акꙋm съ zічem къ M шi N sѫnt нꙋмepe ѫntpeџї, шi къ ръdъчiniлe лор se deosiбeskꙋ ѫntpe еле npintp'o ꙋnime, saꙋ $\sqrt[m]{M}=f$ шi $\sqrt[m]{N}=f+1$. Фie dꙋпъ ачeasta H нꙋмъpꙋл ѫntpeг че se konpinde ѫntpe M шi N, adікъ $H>M$, dap $H<N$. Sꙋбt aчeastъ kondiџie ва fi шi $\sqrt[m]{H}>\sqrt[m]{M}$, saꙋ $\sqrt[m]{H}>f$, шi $\sqrt[m]{H}<\sqrt[m]{N}$, saꙋ $\sqrt[m]{H}<f+1$, de ачeea $\sqrt[m]{H}-f<1$. Съ лꙋъm $\sqrt[m]{H}-f=u$, ꙋnde u ѫnsemneazъ оаре каре кътime maї mікъ dekѫt ꙋnimea. Adeкъ dакъ нꙋмъpꙋл H ва къdea ѫntpe f^m шi $(f+1)^m$ tpeбꙋe negpeшit съ fie $\sqrt[m]{H}=f+u$; naptea чea d'ѫntѫї f a aчestiї ръdъчinї este ꙋn нꙋмъp ѫntpeг, шi чea-л-алtъ u maї mікъ dekѫt ꙋnimea.

§. 289. Съ лꙋъm $u=\frac{r}{s}$, saꙋ кꙋ o fpѫнџepe pedꙋsъ ла чea maї simплъ esnpesie, aї къpia tepminї r шi s nꙋ aꙋ nічї ꙋn fъкътop komꙋn. Ѫntp'aчeastъ inotezъ ва fi $\sqrt[m]{H}=f+\frac{r}{s}=\frac{fs+r}{s}=\frac{g}{s}$, nꙋindꙋ-se

$g=fs+r$; dap fiind къ s нȣ копрinde пе фъкъtорȣл r нічĭ сȣма $fs+r$ саȣ̆ g нȣ se ва пȣtea ꙟмпърці акорat прin нȣмърȣл s. Din екȣація $\sqrt[m]{H}=\frac{g}{s}$ ȣрмеазъ а fi $H=\frac{g^m}{s^m}$; fiind къ g нȣ se поate ꙟмпърці прin s, нічĭ g^m нȣ se ва пȣtea ꙟмпърці прin s^m, de ачеea кꙟtȣл $\frac{g^m}{s^m}$ нȣ поate fi d'опоtрівъ кȣ нȣмърȣл ꙟntрег H. De ȣnde ꙟn sfꙟршit se довеdеще къ нічĭ екȣація $H=\frac{g^m}{s^m}$ нічĭ $\sqrt[m]{H}=f+\frac{r}{s}$, din каре чеa d'ꙟntꙟĭ а ешit, нȣ поate fi adeвърatъ.

§. 290. Аша dap dакъ нȣмърȣл H ва fi копрins ꙟntре f^m ші $(f+1)^m$, кътimea раdікалъ $\sqrt[m]{H}$ нȣ se ва пȣtea esпріма прintр'ȣn нȣмър ꙟntрег §. 288. нічĭ прintр'о фрꙟнцере §. 289. Ачest feл de ръdъчinĭ аȣ̆ ȣn feл de нȣмър ал лор deoseбit каре se deosібеще de нȣмеріле раціонале, пеntрȣ къ орĭ sꙟnt ꙟntреџĭ, саȣ̆ фрꙟнцерĭ. Челе d'ꙟntꙟĭ se мъsoаръ прin ꙟnsȣшĭ ȣnimea, челе d'ал doілеа прintр'о парtе алікȣоtъ а ȣnimi. Ръdъчiniле ірaціонале ꙟnsъ нȣ se поt мъsȣра нічĭ прin ȣnime, нічĭ прin вре о парtе алікȣоtъ а ȣnimi, de ачеea se нȣмеskȣ̆ ші *Нȣмере Inкоnmensȣрабіле* (нȣмере че нȣ se поt мъsȣра).

§. 291. De ші преџȣл ръdъчinілор ірaціонале нȣ se поt esпріма екzакt прin вре ȣn нȣмър раціонал, dap se поate гъsi ȣn нȣмър раціонал каре sъ se deпъртеze de преџȣл чел adeвърat ал ръdъчinі ірaціонале прin чеa маĭ мікъ кътime. Sъ zічем къ $\sqrt[m]{H}$ este ȣn нȣмър ірaціонал ші fiind къ este $\sqrt[m]{H}=$

$\frac{\sqrt[m]{10^{mn}.H}}{10^n}$ (§., 253.), ші пȣтъръторȣл ачещії fрін-ціерї ва fi іраціонал; de ачеа dȣпъ (§. 288.) $\sqrt[m]{10^{mn}.H}=k+u$, ȣnde k ꙟnsemneazъ ȣн пȣмър ꙟntрег ші u о кътіme маї мікъ deкꙟt ȣnimea. Аша dар вом авеа $\sqrt[m]{H}=\frac{k}{10^n}+\frac{u}{10^n}$. Фiind къ ꙟnsъ $u<1$, ва fi ші $\frac{u}{10^n}<\frac{1}{10^n}$. Adiкъ de se ва лȣа $\sqrt[m]{H}=\frac{k}{10^n}$, saȣ dакъ fрꙟнцера zечімалъ $\frac{k}{10^n}$ se ва лȣа dрепt прецȣл кътімі $\sqrt[m]{H}$, грешала ва fi маї мікъ deкꙟt fрꙟнцера $\frac{1}{10^n}$, ші fiind къ пȣtем лȣа пȣмърȣл n орї кꙟt вом воі de маре, ачеаstъ грешалъ se поаte фаче кꙟt de мікъ вом воі. Аша dар de se ва чере прецȣл кътімі $\sqrt[m]{H}$ кȣ n ціfре zечімале, пȣмърȣл H se ва ꙟmmȣлці кȣ пȣтерea 10^{mn}, saȣ каре este tot ȣна, ї se ва adъога mn пȣле, ші dintр'ачеstȣ проdȣкt se ва sкоаte ръdъчіna. Saȣ маї simплȣ, din пȣмърȣл H se ва sкоаte ръdъчіna черȣtъ, ръмъшіці se вор adъога m пȣле пентрȣ ка съ se гъseаsкъ чеа d'ꙟntꙟї ціfръ zечімалъ, гъsindȣ-se se вор adъога m пȣле ла ръмъшіца adоъа ка съ se гъseаsкъ алtъ ціfръ zечімалъ, ші аша ші маї ꙟнколо.

Екzемплꙋрї.

I. $\sqrt{2} = 1,414 \ldots$

1
1|00
96
4|00
281
119|00
11296
604 шчл.

II. $\sqrt{37|27} = 61,049 \ldots$

36
127
121
6|00|00
48816
11184|00
1098801
19599 шчл.

III. $\sqrt[3]{7} = 1,912 \ldots$

1
6|000
5859
141|000
108871
32129|000
21911528
10217472
шчл.

IV. $\sqrt[3]{8|327} = 20,268 \ldots$

8
327|000
242408
84592|000
73665576
10926424|000
89551128 32
107131 2168
шчл.

Ꙟn екzemплꙋл ал III-леа цifра а патра zечimалъ este 9; de ачеꙋа de se вор цinеꙋа нꙋmaĭ треĭ цifре, а 3-леꙋа se ва мърi кꙋ о ꙋnime, саꙋ $\sqrt[3]{7} = 1,913$. Dintр'ачеꙋа прiчinъ ꙟn ал IV-леꙋа екzемплꙋ требꙋе съ se пꙋее $\sqrt[3]{8327} = 20,269$.

§. 292. Dакъ ꙟn §. 271. se ва лꙋа $c = 1$, $x = 1$, ва ешi:

$$\sqrt{(1+1)} = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \text{шчл.}$$

ші ꙟn §. 282. ачеваш сꙋпоziціе dъ:

$$\sqrt[3]{(1+1)}=\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}-\frac{10}{243}+\text{шчл.}$$

Аша dap se пот гъsi ші прецꙋріле кꙋ апропіе але ръdъчінілор прінтр'ачеst fел de серії, пентрꙋ каре sfꙟршіт este de ꙟревꙋінцъ ка термені серіілор съ меаргъ мікшорꙟndꙋ-se, каре se ва фаче кꙋ аlꙟt маї репеde кꙋ кꙟt c ва fi маї маре декꙟt x. S. п. Sъ лꙋъм $c=2$, $x=1$, Екzемплꙋл §. 271. ва da:

$$\sqrt{(4-1)}=\sqrt{3}=2-\frac{1}{4}-\frac{1}{64}-\frac{1}{512}-\frac{5}{16384}\text{шчл.}$$

ші ꙟn §. 282. ачеваш сꙋпоziціе dъ:

$$\sqrt{(4+1)}=\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}-\frac{5}{16384}+\text{шчл.}$$

Dap $1:4=0{,}25$.
$1:64=0{,}01562$.
$1:512=0{,}00195$.
$5:16384=0{,}00031$.

Аша dap $\sqrt{3}=2-0{,}2679=1{,}7321$.
$\sqrt{5}=2{,}2519-0{,}0159=2{,}2360$.

Акꙋм съ пꙋнем ꙟn §. 282. $c=2$, $x=1$; ші ва fi:

$$\sqrt[3]{(8-1)}=\sqrt[3]{7}=2-\frac{1}{12}-\frac{1}{288}-\frac{5}{20736}-\frac{10}{497664}-\text{шчл.}$$

$$\sqrt[3]{(8+1)}=\sqrt[3]{9}=2+\frac{1}{12}-\frac{1}{288}+\frac{5}{20736}-\frac{10}{497664}+\text{шчл.}$$

Dap 1 : 12 = 0,083333.
1 : 288 = 0,003472.
5 : 20736 = 0,000241.
10 : 497664 = 0,000021.

De ачеа: $\sqrt[3]{7} = 2 - 0,08707 = 1,91293.$

$\sqrt[3]{9} = 2,08357 - 0,00349 = 2,08008.$

Ачest feл de sepiĭ se пot faче пentpȣ opĭ каpe ръdъчinъ daкъ se ва desfaче бinomȣл $(c^m+x)^{\frac{1}{m}}$ dȣпъ §. 229. Este ꙟnsъ ȣn aлt metod maĭ simплȣ шi maĭ ȣшop пentpȣ a гъsi градȣл апропiepi aл opĭ кърia ръdъчinĭ.

§. 293. Sъ лȣъm $\sqrt[m]{H} = a + x$; ȣnde a sъ ꙟnsemneze пȣmъpȣл каpe esпpimеазъ пpeцȣл ръdъчini чeлiĭ maĭ de апpoane, aшa ꙟnкꙟt x sъ fie maĭ mik deкꙟt ȣnimеа adiкъ ва fi $H = (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x +$ шчл. §. 229. Фiind къ ꙟnsъ x este o fpꙟnџepe adевъpatъ, aлe кърia пȣtepĭ maĭ ꙟnaлte ȣpmеазъ a se miкшopa (§. 167), шi fiind къ ꙟntp'ачest каλкȣл se чepe пpeцȣл апpoпiat aл лȣĭ x, se вop лепъda toцĭ tepmeni sepiĭ de maĭ sȣs, каpe aȣ de фъкътopĭ пȣtepĭ maĭ ꙟnaлte, шi sъ пȣnem $H = a^m + ma^{m-1}x$. De se ва sкъdеа din amꙟndoъ пърцiлe ачeщiĭ екȣaцiĭ a^m вom aвеа $H - a^m = ma^{m-1}x$; шi de se вop ꙟmпърцi amꙟndoъ пърцiлe ачeщiĭ екȣaцiĭ пpin ma^{m-1} ва da $x = \frac{H-a^m}{ma^{m-1}}$. Ачest пpeцȣ sȣбstitȣindȣ-se ꙟn екȣaцia

$\sqrt[m]{H} = a + x$, ва da $\sqrt[m]{H} = a + \frac{H - a^m}{ma^{m-1}} =$

$$\frac{ma^m + H - a^m}{ma^{m-1}} = \frac{H + (m-1)a^m}{ma^{m-1}}.$$

Екzemплȣрї.

I. Пentpȣ $\sqrt{2}$ съ se пȣe ꙟatp'ачеastъ fopmȣлъ $H=2$, $a=1$, $m=2$, de ȣnde $\sqrt{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}=1,5$. Акȣm ꙟntp'ачеаш fopmȣлъ съ se пȣe ꙟn локȣл лȣї a чел d'ꙟntꙟї прецȣ̆ апропiat, saȣ̆ $a=\frac{3}{2}$, ші ва fi $\sqrt{2}=$ $\frac{2+(\frac{2}{3})^2}{2.\frac{2}{3}}=\frac{17}{12}=1,417\ldots$ Съ se пȣe іаръш $a=\frac{17}{12}$; ачеastъ sȣпоziціe ва da $\sqrt{2}=\frac{2+\frac{289}{144}}{2.\frac{17}{12}}$ $=\frac{577}{408}=1,4142156\ldots$, ші прецȣл ачеsta ва fi ꙟнкъ ші ла ашеasea цifpъ zечiмалъ екzакт.

II. Пentpȣ $\sqrt[3]{26}$ съ пȣnem $H=26$, $a=3$, $m=3$.

$$\sqrt[3]{26}=\frac{26+2.\,3^3}{3.\,9}=\frac{80}{27}=2,96296\ldots$$

Акȣm съ пȣnem $a=\frac{80}{27}$

$$\sqrt[3]{26}=\frac{26+2\left(\frac{80}{27}\right)^3}{3.\left(\frac{80}{27}\right)^2}=\frac{26(27)^3+2(80)^3}{3.\,27.\,(80)^2}$$

$$=\frac{1535758}{518400}=2,9624961\ldots$$

прецȣл ачеsta ва fi ші ла ашаsea zечiмалъ екzакт.

III. Пentpȣ $\sqrt[4]{13}$ съ пȣnem $H=13$, $m=4$, ші $a=2$, пentpȣ къ $2^4=16$ se deoseбеще de нȣмърȣл 13 маї пȣцin декꙟt $1^4=1$.

$$\sqrt[4]{13} = \frac{13+3.\ 4^2}{4.\ 2^3.} = \frac{61}{32} = 1,90625.$$

Алdoiлеа съ se иа $a = \frac{61}{32}$

$$\sqrt[4]{13} = \frac{13+3\left(\frac{61}{32}\right)^4}{4.\left(\frac{61}{32}\right)^4} = \frac{13(32)^4+3(61)^4}{4.\ 32.\ (61)^3}$$

$$= \frac{55169011}{29053568}.$$

Аша dар $\sqrt[4]{13} = 1,898872$ прецȣ каре este екzакт ші ла апаtра zечiмалъ.

Ръdъчinї din fрѫnцерї.

§. 294. Фiind къ ръdъчina fрѫnцерi este d'опотрівъ кȣ ръdъчina нȣмъръторȣлȣї ѫмпърцitъ прin ръdъчina нȣміtорȣлȣї §. 250. Ръdъчina еї ва fi рацionалъ кѫnd ръdъчiniле amѫndȣрора терміnілор еї вор fi рацiонале. S. п. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$;

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3};\quad \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7};\quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

De оnde $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}}{b^{mr}}} = \frac{a^n}{b^r}$.

§. 295. Dакъ ѫnsъ, 1) saȣ din нȣмъръtор, saȣ 2) din нȣмitор, saȣ 3) din amѫndoї de одатъ нȣ se поате скоате ръdъчina; atȣnчї ръdъчina fрѫnцерi ва fi ірацionалъ, ші ѫn нȣмере рацionале, нȣmaї прin апроксiмацie se поате хотърѫ.

I. Ꙟntꙟmплареа чеа d'ꙟntꙟĭ se репрезanteaзъ прin fop-
мѹла $\sqrt[m]{\frac{a}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{b}$.

S. п. $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,732\ldots}{2} = 0,866\ldots$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{27}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{3} = \frac{1,912\ldots}{3} = 0,637\ldots$$

II. Чеа-л-алtъ ꙟntꙟmплape se копрinde ꙟn fopmѹла
$\sqrt[m]{\frac{a^m}{b}} = \frac{a}{\sqrt[m]{b}}$.

S. п. $\sqrt{\frac{9}{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3}{3,316\ldots} = 0,904\ldots$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2}{2,080\ldots} = 0,961\ldots$$

Ла ачеаstъ ꙟntꙟmпларе прецѹл кѹ апропiере se поаte гъsi маĭ лесне dакъ ꙟmпърцitорѹл, saѹ нѹmitорѹл fрꙟнцеpi se ва faче рацiоналѹ, (§. 252). Аша dар ꙟn челе doъ екzemплѹрĭ dѹпъ ѹрmъ ва fi:

$$\sqrt{\frac{9}{11}} = \sqrt{\frac{99}{11^2}} = \frac{9,949\ldots}{11} = 0,904\ldots.$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \sqrt[3]{\frac{24}{27}} = \frac{2,884\ldots}{3} = 0,961\ \ldots$$ Шi ꙟнкъ:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{7}} = \sqrt[3]{\frac{49}{7^3}} = \frac{3,359\ldots}{7} = 0,522\ \ldots$$

III. Ꙟn ꙟntꙟmплареа а tреа ꙟn каре а fost $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$
sъ se каѹte прецѹрiле кѹ апропiере але ръdъчinі-

лор din amꙟndoї termeni, каре прецꙋрї вор fi тер-
meni fрꙟnџері раціонале, че ва арѣta прецꙋл кꙋ а-
пропіере ал рѣdѣчіni fрꙟnџерї ꙟntреџї. S. п. Фі-
ind къ este $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ ші $\sqrt{3} = 1,732\ldots$, съ se пꙋе $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1,414\ldots}{1,732\ldots} = 0,816\ldots$ Прецꙋл рѣdѣчіni ва fi кꙋ атꙟt maї екzакt кꙋ кꙟt maї мꙋлte џifре se вор џinea ꙟn termeni ачещії fрꙟnџерї. Adiкъ $\frac{1414}{1732}$ maї пꙋџin se deoseбеще de прѣцꙋл чел adeвърat ал къtími $\sqrt{\frac{2}{3}}$ deкꙟt $\frac{141}{173}$; ачeasta maї пꙋџin deкꙟt $\frac{14}{17}$. Преа біne ꙟnsъ se поate арѣta ачest прецꙋ прin fрꙟnzeчimалъ $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1,414\ldots}{1,732\ldots} = 0,816\ldots$ Asemenea se гъseще $\sqrt[3]{\frac{6}{13}} = \frac{1,817\ldots}{2,351\ldots} = 0,772\ldots$ Ші ла ачeastъ ꙟntꙟmпларе sокоteaла este maї лesne dакъ пꙋmitорꙋл fрꙟnџерi se ва fаче раціонал. Adiкъ:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{2,449\ldots}{3} = 0,816\ldots$$

$$\sqrt[3]{\frac{6}{13}} = \sqrt[3]{\frac{1014}{(13)^3}} = \frac{10,046\ldots}{13} = 0,772\ldots$$

§. 296. Орї каре пꙋmър копріnde n џifре zeчimале, se репрezenteazъ прin fрꙟnџерea $\frac{A}{10^n}$, (§. 182.) ꙟnsъ $\sqrt[m]{\frac{A}{10^n}}$ ва fi раціоналъ кꙟnd se ва пꙋtea sкоate рѣdѣчina атꙟt din пꙋmърѣторꙋл A кꙟt ші din пꙋmitорꙋл 10^n. Dар орї каре ва fi пꙋmърꙋл A, чea maї dꙋпѣ ꙋрmѣ коndiџie ва fi, ка n съ se поатъ ꙟmпърџi прin m

saŭ ка пѫтърѫл ціфрелор zечімале sъ fie ѫн ѫmmѫлціt din esпонентѫл радікал. Аша dар кѫnd se ѫntѫмпль а fi ръdъчіна аdоъа, пѫтърѫл zечімалелор требѫе sъ fie кѫ soцѫ; Іар dакъ ва fi а se sкоате ръdъчіна а треа атѫнчі se чер орі треі, орі шase, орі поъ ціфре zечімале. Dакъ ачеastъ коndіціе лінсеще se вор ѫmплiні ціфреле че ліпseskѫ кѫ пѫлеле zечімале, че se вор аdъога dеа dреапta. Аша аdікъ амѫndoї терmені фрѫнцері $\frac{A}{10^n}$ se вор ѫmmѫлці прінtр'о asfел de пѫтере а пѫтърѫлѫї 10 ѫнкѫt esпонентѫл пѫміторѫлѫї sъ se поаtъ ѫmпърці прін esпонентѫл радікал. S. п. De se ва кътта ръdъчіна а dоъа а пѫтърѫлѫї 0,5, se ва аdъога о пѫлъ ші ва fi 0, $= \frac{50}{100}$; din пѫміторѫл ачещії фрѫнцері, se поате sкоате ръdъчіна. Saŭ de se ва кътта а треа ръdъчінъ а пѫтърѫлѫї 0,7 se вор аdъога dоъ пѫле ка sъ fie $0{,}700 = \frac{700}{1000}$; ші пѫміторѫл ачещії фрѫнцері ва авеа ръdъчіна а треа раціоналъ. Asemenеа ші

$$\sqrt{2{,}037} = \sqrt{2{,}0370} = \sqrt{\frac{20370}{10000}} = \frac{\sqrt{20370}}{100}.$$

$$\sqrt[3]{1{,}0605} = \sqrt[3]{1{,}060500} = \sqrt[3]{\frac{1060500}{10^5}} = \frac{\sqrt[3]{106500}}{100}.$$

$$\sqrt[5]{0{,}032} = \sqrt[5]{0{,}03200} = \sqrt[5]{\frac{3200}{10^5}} = \frac{\sqrt[5]{3200}}{10}.$$

§. 297. Dinтр'ачесте de маї sѫs арътаte афлъм метоdѫл хрънъtор пентрѫ sкоатереа ръdъчіні фрѫнцерілор zечімале. Sъ se ѫmпарцъ ціфреле zечімале ѫнчепѫnd de ла віргѫлъ spre dрѣапtа ꙟn класе, къpора съ лi se dѣ atꙟtѣ цifpe кꙟte ȣnimĭ коnpinde esпоnentȣл pаdiкaл; шi daкъ ꙟn клasa dȣпъ ȣpmъ despre dрѣапtа лinseskȣ̆ ȣna saȣ̆ maĭ mȣлte note, ꙟn лoкȣл лop sъ se șкpie atꙟtѣ nȣлe кꙟte цifpe лinșeskȣ̆. Dȣпъ ачѣ fpꙟnцepѣ ast feл despъpцitъ se ва sokoti ка ȣn nȣmъp ꙟntpeг, din кapе se ва skoate ръdъчina че se чepe. Ꙟn sfꙟpшit din ръdъчina че se ва aflа se ва tъꙗ pentpȣ fie каpе клasъ кꙟte o цifpъ zeчimaлъ. Daкъ ръdъчina nȣ ва fi paцionaлъ, dȣпъ че se вop aflа челе d'ꙟntꙟĭ але eĭ цifpe zeчimaле, se пot гъsi pрin metodȣл apъtat ꙟn параграфȣл 291. шi aлteлe pentpȣ maĭ mȣлtъ anponiepe, de ва face tpeбȣinцъ.

Екzemплȣрĭ.

$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ | $\sqrt{0{,}0009} = 0{,}03$
$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ | $\sqrt{0{,}0049} = 0{,}07$
$\sqrt{0{,}0169} = 0{,}13$ | $\sqrt{0{,}000529} = 0{,}023$
$\sqrt{0{,}055225} = 0{,}235$ | $\sqrt{0{,}534361} = 0{,}731$

$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$ | $\sqrt[3]{0{,}000001} = 0{,}01$
$\sqrt[3]{0{,}064} = 0{,}4$ | $\sqrt[3]{0{,}000027} = 0{,}03$
$\sqrt[3]{0{,}343} = 0{,}7$ | $\sqrt[3]{0{,}103823} = 0{,}47$

$= 17^3 =$

$$\sqrt{0,1} = \sqrt{0,10} = 0,3162\ \ldots.$$

$$\begin{array}{r}
9 \\
\hline
1|00 \\
61 \\
\hline
39|00 \\
3756 \\
\hline
144|00 \\
12644 \\
\hline
1756 \text{ шчл.}
\end{array}$$

$$\sqrt{0,016} = \sqrt{0,01|60} = 0,1264\ \ldots.$$

$$\begin{array}{r}
1 \\
\hline
60 \\
44 \\
\hline
16|00 \\
1476 \\
\hline
124|00 \\
10096 \\
\hline
2304 \text{ шчл.}
\end{array}$$

$$\sqrt{0,144} = \sqrt{0,14|40} = 0,3794\ \ldots.$$

$$\sqrt{0,3707} = 0,6088\ \ldots.$$

$$\sqrt[3]{0,1} = \sqrt[3]{0,100} = 0,464\ \ldots.$$

$$\begin{array}{r}
64 \\
\hline
36|000 \\
33336 \\
\hline
2664|000 \\
2561344 \\
\hline
102656 \text{ шчл.}
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{0,27} = \sqrt[3]{0,270} = 0,646\ \ldots.$$

$$\sqrt[3]{0,02037} = \sqrt[3]{0,020|370} = 0,273\ \ldots.$$

Dакъ нȣmърȣл ва fi компȣs ѻ парте din цifре ꙟntреџї шi о парте din цifре zе-чimале, sъ se ꙟmпарцъ ꙟn класе, челе d'ꙟntꙟї цifре dела віргȣла zечimалелор sпре stꙟнга, ꙗр челе d'аldoiлеa, dела ачеastъ віргȣлъ sпре dреапта; dȣпъ ачееa din нȣmърȣл ꙟmпърцit asfел, ка dintр'ȣн нȣmър ꙟntрег, sъ se sкоацъ ръdъчina, шi апої din ръdъчina афлатъ se ва тъꙗ пентрȣ fieкаре класъ а zечimалелор кꙟte о цifръ zечimалъ.

Екеzеmплȣрї.

$\sqrt{563,5876} = \sqrt{5,63,58|76} = 23,74$

```
4
163
129
 3458
 3269
  18976
  18976
      0
```

$\sqrt{7835,6} = \sqrt{78|35,60} = 88,518 \ldots$

```
64
1435
1344
 9160
 8825
  335|00
  17701
  15799|00
  1416224
   163670 шчл.
```

$$\sqrt[3]{8,5}=\sqrt{8,500}=2,0408\ \ldots.$$

$$\begin{array}{l}
8 \\
\hline
500|000 \\
489664 \\
\hline
10336000|000 \\
9991757312 \\
\hline
344242688 \text{ шчл.}
\end{array}$$

§. 298. Dакъ fpꙟnџepea котȣпъ nȣ va aвea nічї o ръdъчinъ paцionaлъ (§. 294.) sъ se ꙟntoapкъ aчea fpꙟnџepe ꙟn fpꙟnџepe zeчimaлъ, din каpe sъ se sкoaцъ ръdъчina dȣпъ pегȣлiлe §. 297. Aчest metod пentpȣ a afлa ръdъчina апpoкsimatъ a aчestȣї feл de fpꙟnџepї, este maї лesne a se ꙟntpeбȣinцa deкꙟt чeлe-л-aлte, чe s'aȣ apъtat ꙟn пapaгpafȣл 295.

Eкzemплȣpї.

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{0,66|66|66|66|66|66\ldots}=0,816495\ldots.$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{0,666|666|666|\ldots}=0,873\ldots.$$

$$\sqrt{7\frac{5}{12}}=\sqrt{7,41|66|66\ldots}=3,723\ldots.$$

$$\sqrt[3]{\frac{357}{160}}=\sqrt[3]{2,231|250|000|\ldots}=1,306\ldots.$$

ПЕТРȢ РАЦІІ ШІ ПРОПОРЦІІ.

§. 299. Paцia apitmetiкъ a кътimiлop omoџene este кomпapaцia лop despre deosebipea чe se afлъ ꙟntpe eлe. Aчeastъ paцie se esпpimeazъ пpin кътimiлeaлъ tȣpate шi пpin semnȣл — че se пȣne ꙟntpe еле., Adiкъ пpin fopmȣ-ла $a - b$ se apatъ рацiа apitmetiкъ ꙟntpe кътimiле a шi b; tepminȣл чел d'ꙟntꙟĭ se пȣmeще antечedent, ѣр чел d'aлdoiлѣ konseкȣent. Ковꙟршipѣ ȣnia neste чѣ-л-алтъ se ziче difepenцъ. Рацiа este кpeskътoape кꙟnd konseкȣentȣл ва fi maĭ mape декꙟt antечedentȣл, ла ꙟntꙟмплapѣ dinпpotiвъ paцia ва fi sкъzътoape.

§. 300. Tot d'aȣna кꙟnd ꙟn вpe o рацie apitmetiкъ se ва sкъdѣ antечedentȣл din konseкȣent ка sъ se afле difepenцa, aчѣasta ва fi пozitiвъ ꙟn рацiа кpeskътoape, шi negatiвъ ꙟn чѣ sкъzътoape. Adiкъ difepenцa рацiĭ $5 - 9$ ва fi $= 4$, шi a рацii $9 - 5 = -4$.

§. 301. Sъ ziчem къ difepenцa рацii $a - b$ este d; вom aвѣ dap dȣпъ §. 300.

1) $d = b - a$; saȣ difepenцa рацii apitmetiче este de-опotpiвъ кȣ konseкȣentȣл maĭ пȣцin antечedentȣл.
2) Daкъ ла amꙟndoъ пъpцiле але екȣацiĭ $d = b - a$ se ва adъoga a, вom aвѣ $a + d = b$; saȣ konseкȣentȣл este d'опotpiвъ кȣ antечedentȣл maĭ mȣлt difepenцa.
3) Daкъ din amꙟndoъ пъpцiле але екȣацii $a + d = b$ se ва sкъdѣ d, вom aвѣ $a = b - d$, saȣ antечedentȣл este d'опotpiвъ кȣ konseкȣentȣл maĭ пȣцin difepenцa. Aшa dap daкъ din tpeĭ кътimĭ a, b, d че вop fi але ȣneĭ рацiĭ apitmetiче, вop fi кȣnoskȣte doъ, a tpeѣ se пoate afла пpin екȣацiiле de maĭ sȣs, ꙟn кape ꙟnsъ difepenцa tpeбȣe sъ se ѣ кȣ semnȣл skimбat, кꙟnd рацiа ва fi sкъzътoape.

§. 302. Рацiiле apitmetiче sꙟnt d'опotpiвъ aче лєа каре аȣ diferenџe d'опotрівъ. Аша dар 7—9 ші 3—5 saȣ 5—2 ші 8—5 sѫnt рацiї d'опotрівъ, пентрȣ къ челе doъ d'ѫntѫї аȣ diferenџа 2, iар челе-л-алte doъ — 3.

§. 303 Sъ zічет іаръш къ diferenџа рацiii $a-b$ este d. Акȣm dакъ din $b\pm m$ воm skъdea $a\pm m$, вom авеа $(b\pm m)-(a\pm m)=b\pm m-a\mp m=b-a=d$; аша dар рацiа $(a\pm m)-(b\pm m)$ este d'опotрівъ кȣ рацiа $a-b$, пентрȣ къ ші ȣна ші алta аȣ ачеаш diferenџъ d. *Аша dар, dакъ doї termenї aї рацiii aritmetiче se вор mъри saȣ se вор mікшора кȣ ачеаш кътime, рацiа лор нȣ se ва skimба. Іар dакъ amѫndoї termeni se вор ѫmmȣлцi saȣ se вор ѫmпърцi printr'ачелаш нȣmър, рацiа лор se skimбъ*; пентрȣ къ diferenџа рацiii $ma-mb$ ва fi $m(b-a)=md$; ші а рацiii $\frac{m}{a}-\frac{b}{m}$ diferenџа ва fi $\frac{b-a}{m}=\frac{d}{m}$; ші fie каре dintр'ачеstea se ва deoseбi de diferenџа d арацiii $a-b$.

§. 304. Екȣацiа ѫntre doъ рацiї aritmetiче se zіче *пропорцiе aritmetікъ*. Adікъ de ва fi $b-a=f-c=d$, рацiiле $a-b$ ші $c-f$ вор fi d'опotрівъ, ші рацiа $a-b=c-f$, каре аратъ ачеаstъ потрівіре, este пропорцiе, каре se чітеще аша: a se аре aritmetічеще кътре b, прекȣm c кътре f. Termeni a, b, c, f sѫnt aritmetічещї пропорцiоналї, a ші f ekstremї (din afаръ) b ші c mediї (de mіжлок).

§. 305. Sъ лȣъm пропорцiа aritmetікъ $a-b=c-f$;

ლ difepenца комѫнъ а amѫndѫpopa paцiiлop $= d$. Dѫпъ §. 301. вom авеа $b=a+d$ шi $y=c+d$. Акѫm de вom adъoга c ла чеа d'ѫntiй dintp'ачеste кътimi, шi ла чеа-л-алтъ a, вom авеа $b+c=a+c+d$ шi $a+f=a+c+d$ saѫ $a+f=b+c$. Аша dap ѫn fie каpe пpoпopцie apitmetiкъ sѫma tepmeniлop dinafapъ este d'oпotpiвъ кѫ sѫma tepmeniлop de miжлок. Ачеваш se noate doвedi maĭ simплѫ ѫntp'ачest кin: fiind къ пpin §. 301. $b-a=f-c$, съ adъoгъm fie кърia пърцi а ачещiĭ екѫaцiĭ $a+c$, шi вom авеа: $b-a+a+c=f-c+a+c$, saѫ $b+c=a+f$. Sпp. пiл. $7-10=3-6$ dъ $7+6=10+3=13$. $9-4=16-11$ dъ $9+11=4+16=20$.

Ѫn pечiпpoкъ de ва fi $a+f=b+c$, dintp'ачеаstъ екѫaцie se noate fopma o пpoпopцie apitmetiкъ. Пentpѫ къ вom авеа $a-b=c-f$, saѫ $a-c=b-f$. S. п. Din $5+32=21+16$ ѫpmеazъ $5-21=16-32$.

§. 306. Ла tpeĭ кътimĭ date a, b, c, se noate гъsi tot d'ѫna а пatpa x apitmetiчеще пpoпopцiona-лъ, adiкъ asfeл, ѫнкѫt съ fie: $a-b=c-x$.

1) Din paцia кѫnoskѫtъ $a-b$ se гъseще difepenца еĭ $d=b-a$. Dap fiind къ paцia $c-x$ тpeбѫe съ аĭбъ ачеваш difepenцъ, ѫpmеazъ а fi: $x=c+d$ §. 301. de ачееа $x=c+b-a$.

2) Din пpoпopцia $a-b=c-x$ ѫpmеazъ dѫпъ §. 305 екѫaцia $a+x=b+c$, шi dакъ din amѫndoъ пърцiле ачещiĭ екѫaцiĭ se ва skъdеа a, se ва гъsi iаръш $x=b+c-a$. Шi аша amѫndoъ metoadeле чел d'ѫntѫĭ saѫ чел d'алdoiлеа ва da ачеваш а пatpa пpoпopцionaлъ. S. п. $15-32=7-x$ dъ

$x=32+7-15=24$. Asemenea se поate afла орі каре терміп ꙟп пропорціе арітметікъ, кꙟnd чеі-лалці треі терменї вор fi кȣпоскȣці. S. п. $5\frac{2}{3}-x=12\frac{1}{6}-17\frac{3}{4}$, дъ: $x+12\frac{1}{6}=5\frac{2}{3}+17\frac{3}{4}=23\frac{7}{20}$ ші дакъ амꙟndоъ пърціле ачеції екȣації se ва скъdеа $12\frac{1}{6}$ ла еші $x=23\frac{7}{20}-12\frac{1}{6}=11\frac{11}{20}$.

§. 307. **Пропорціе арітметікъ контіпȣъ** se пȣмеще ачеа ꙟп каре термені din міжлок сꙟnt deопотрівъ, ші прін ȣрмаре ꙟп каре консеквентȣл рації челії d'ꙟntꙟі este ꙟntр'ачеаші време антечеdent ла чеа deadoiлеа, прекȣм ꙟп $a-b=b-c$. Ачесте треї кътімї $a-b-c$ se пȣмескȣ контінȣе пропорціонале; b este **medie** (de міжлок) **арітметікъ** ꙟntre a ші c, iар c este **терціе контінȣъ пропорціоналъ** ла a ші b.

§. 308. Din пропорціа контінȣъ $a-b=b-c$ ȣрмеазъ:

1) $2b=a+c$. §. 305. ші $b=\frac{a+c}{2}$, кꙟnd амꙟndоъ

пърціле але екȣації челії d'ꙟntꙟї se вор ꙟmпърці прін 2. **Adікъ чеа de міжлок пропорціоналъ арітметікъ ꙟntre доъ кътімї este d'опотрівъ кȣ жȣмътате сȣма ачелор кътімї.** S. п. $\frac{7+13}{2}=10$, аша dар 10 este de міжлок ꙟntre 7 ші 13. Asemenea ші m este de міжлок ꙟntre $m+n$ ші $m-n$, пентрȣ къ $\frac{m+n+m-n}{2}=\frac{2m}{2}=m$.

2) De se va skъdea a din amчndoъ пърціле але екѕаціі $2b = a + c$, se ва гъsi $c = 2b - a$. Adikъ atpeea kontinѕъ ші apitmetikъ пропорціоналъ se гъseще кчnd se ва skъdea чеа d'чntчĭ din чndoita medie.

§. 309. Dчndѕ-se тepminѕл чел d'чntчĭ a кѕ diferenца d, чn пропорціе коntinѕъ, se пot гъsi ші чеĭ-л-алці tepminĭ. Konsekѕentѕл раціі d'чntчĭ, saѕ tepminѕл de mіжлок ва fi $b = a + d$ (§. 301); ші fiind къ ачелаш este antecedent чn раціа deadoiлea, konsekѕentѕл лѕĭ ва fi $c = b + d = a + d + d = a + 2d$. Аша dap чеĭ tpeĭ tepmenĭ kontinѕĭ пропорціоналĭ sчnt: a, $a + d$, $a + 2d$; saѕ dakъ tepmeni skad: a, $a - d$, $a - 2d$.

Раціĭ цеоmetpiче.

§. 310. Раціе цеоmetpikъ este компараціа adoъ кътimĭ omoцene despre кчt, каpe se afлъ dakъ se ва чmпърці ѕna printp'aлta. Ачeastъ раціе se pепpezanteazъ прin кътimiле че se компар (se aлътѕp) чntpe еле, ші прin semnѕл (:) че se пѕne чntpe еле. Adikъ $a : b$ чnsemneazъ раціа цеоmetpikъ a кътimi a кътpe кътimea b; adikъ de кчte opĭ ѕna este maĭ mape deкчtчеea-л-алтъ, a este antecedent, b konsekѕent ал раціĭ. Раціа кpeще de ва fi $a < b$, ла чntчmплаpe dinпpotivъ ea skade.

§. 311. Кчtѕл saѕ esпonentѕл раціі цеоmetpiче este пѕmъpѕл че ese dakъ konsekѕentѕл se ва чmпърці прin antecedentѕл съѕ. De ачеea dakъ кчtѕл раціĭ $a : b$ se ва пѕmi q, ва fi $q = \frac{b}{a}$. Чn раціа крeskъtoape $b>a$, asemeпea ва fi ші $q>1$; ҥn раціа skъzъtoape $q<1$; ші ҥn чea maĭ dȣпъ ȣртъ de ва fi $a=b$, гоm авеа $q=1$. Аша dар dакъ кҥtȣл вре ȣпеĭ раціĭ se ва гъsi d'опоtрівъ кȣ ȣпіmea, кътіmiле комппарате вор fi d'опоtрівъ ҥntре еле.

§. 312. Dакъ ші о парtе ші алta а екȣаціі $q=\frac{b}{a}$ se ва ҥmmȣлці пріп a, воm авеа $b=aq$, saȣ konseкȣentȣл раціі цеоmetріче este d'опоtрівъ кȣ antечеdentȣл ҥmmȣлціt кȣ кҥtȣл. Ші dакъ tерmeni ачещіĭ dȣпъ ȣрmъ екȣаціĭ se ва ҥmпърці пріп q, se ва afла $a=\frac{b}{q}$, saȣ antечеdentȣл раціі цеоmetріче este d'опоtрівъ кȣ konseкȣentȣл sъȣ ҥmпърціt кȣ кҥtȣл. Аша dар кȣnoskҥndȣ-se доъ кътіmĭ, ва fi кȣnoskȣtъ ші а лор раціе §. 311. dар пȣ ші din пpotівъ, кътіmiле adeкъ пȣ se вор пȣtea кȣnoaщe пріп а лор раціе, dекҥt dакъ se ва da ҥmпреȣпъ кȣ раціа лор ші ȣпа din кътіmĭ. De обще ҥn раціа цеоmetрікъ se поate хотърҥ fie каре din челе треĭ кътіmĭ a, b, q, пріп челе-л-алtе доъ.

§. 313. Раціiле цеоmetріче sҥnt d'опоtрівъ ачелеа каре аȣ кҥtȣрĭ d'опоtрівъ. Adікъ раціiле $a:b$ ші $c:d$ вор fi d'опоtрівъ dакъ вор fi $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; sпре. п. $1:3$, $5:15$, $7:21$ шчл. sҥnt раціĭ d'опоtрівъ, пепtрȣ къ ҥn fie каре din еле konseкȣentȣл este de треĭ орĭ maĭ mаре dекҥt antечеdentȣл sъȣ.

§. 314. Фiind къ $\frac{bm}{am}=\frac{b}{a}$ ші $\frac{b:n}{a:n}=\frac{b}{a}$, dȣпъ

§. 147. раціiле $ma:mb$ ші $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ вор авеа ачелаш кtt, прекꙋм раціа $a:b$; de ачеа раціа адоъ къtimi нꙋ se skimбъ, кtnd amtndoъ пърціле se tmmꙋлцеskꙋ, saꙋ se tmпърцеskꙋ кꙋ ачелаш нꙋмър. De обще раціа $\frac{am}{n}:\frac{bm}{n}$ ва fi d'oпotpiвъ кꙋ раціа $a:b$, пentpꙋ къ $\frac{bm}{n}\times\frac{n}{am}=\frac{b}{a}$, §. 311. ші §. 169. saꙋ пentpꙋ къ amtndoъ пърціле аꙋ ачелаш кtt.

§. 315. Раціа $a:b$ tnsъ se skimбъ, daкъ amtndoї tepmeni se вор адъога saꙋ se вор skъdea кꙋ ачелаш нꙋмър. Пentpꙋ къ кttꙋл раціi $(a\pm m):(b\pm m)$ este $=\frac{b\pm m}{a\pm m}=\frac{b}{a}\mp\frac{m(b-a)}{a(a\pm m)}$, каре ва съ zікъ deosebit de кttꙋл $\frac{b}{a}$ ал раціi $a:b$, afаpъ daкъ ар fi $a=b$, ла каре tntтмпларе fpтнцереа $\frac{m(b-a)}{a(a\pm m)}$ se щерџе.

§. 316. Съ лꙋъm maї mꙋлte раціï deoпotpiвъ $a:b$, $c:d$, $e:f$ шчл. ші кttꙋл лор комꙋн $=q$. Фiind къ $b=aq$, $d=cq$, $f=eq$ шчл. ва fi ші $b+d+f+$ шчл. $=aq+cq+eq$ шчл. $=(a+c+e$ шчл.$)\,q$. Daкъ amtndoъ пърціле ачещії екꙋаціï se вор tmпърці прin $a+c+e+$ шчл. ва еші $\frac{b+d+f+\text{ шчл.}}{a+c+e+\text{ шчл.}}=q$. De ꙋnde ꙋpmeazъ къ раціа $(a+c+e+...):(b+d+f+...)$ este d'oпotpiвъ кꙋ раціа $a:b$, $c:d$, шчл. Аша daр de вор fi maї mꙋлte раціï deoпotpiвъ, сꙋma antечedenцiлор se ва авеа кътре сꙋma konsekꙋenцiлор, прекꙋm fie каре antечedent кътре konsekꙋentꙋл съꙋ. Пе лꙟнгъ ачеаsta este ꙟnвedepat къ tepmeni ачestop рацiĭ trebꙋe sъ fie saꙋ nꙋmepe, saꙋ кътimĭ omoцene, nentpꙋ къ amintpeлеа nꙋ se not adꙋna. Ачеваш tpeбꙋe sъ se ꙟnsemneze шi nentpꙋ кътimiле ꙋpmътoape.

§. 317. Съ лꙋъm iаръш рацiа d'onotpiвъ $a:b$, $c:d$, шi кꙟtꙋл лор q. Пentpꙋ къ $b=aq$, $d=cq$, ва fi шi $b-d=aq-cq=(a-c)q$; шi nentpꙋ къ екꙋацiа ꙟmпърцitъ прin $a-c$ dъ $\dfrac{b-d}{a-c}=q$; de ачеа рацiа $(a-c):(b-d)$ ва fi d'onotpiвъ кꙋ рацiiле $a:b$ шi $c:d$. Аша dap difepenца antечedenцiлор a doъ рацiĭ d'onotpiвъ se ape кътpe difepenца konsekꙋenцiлор, прекꙋm fie каре antечedent кътре konsekꙋentꙋл съꙋ.

§. 318. Фie p, q, r, . . . кꙟtꙋpiле рацiiлор $a:b$, $c:d$, $e:f$, шчл.; de ꙋnde $b=aq$, $d=cq$, $f=er$, шчл., шi $bdf\ldots=ace.\,pqr$, saꙋ $\dfrac{bdf}{ace}=pqr$.

Аша dap кꙟtꙋл рацii $ace:bdf$ ва fi pqr; saꙋ dакъ tepmini omoлоцĭ aĭ maĭ mꙋлtop рацiĭ se вор ꙟnmꙋлцi ꙟntpe eĭ, рацiа продꙋктелор se ва komпꙋne din рацiiле fъкъtopiлор; adiкъ рацiа чеа d'ꙟntꙟĭ ва авеа dpent кꙟt продꙋктꙋл din кꙟtꙋpiле fie кърia рацiĭ.

§. 319. Dакъ ачеste рацiĭ вор fi d'onotpiвъ, шi кꙟtꙋл лор q, продꙋктеле tepmeniлор deла a doъ рацie вор da dрепt кѫt q^2, saŭ вор fi ѫп рапорt dѹплікаt ал кътімілор a ші b, c ші d, шчл. Продѹктѹл термепілор а треĭ рацiĭ вор авеа dрепt кѫt q^3, saŭ вор fi ѫп рапорt тріплікаt ал кътімілор a ші b, c ші d, шчл.

§. 320. Dintр'ачеstea ѹрмеазъ ѩаръш къ рацііле $a^2:b^2$, $a^3:b^3$, аŭ dрепt кѫt q^2, q^3 шчл. saŭ ачесте пѹтері sѫпt ѫп dѹплікаte, тріплікаte шчл. рапортѹрĭ але ръдъчіпілор a ші b. De обще dакъ q ва fi кѫтѹл рацii $a:b$, fiind къ $b=aq$, ва fi ші $b^m=a^m.q^m$; de ачеа q^m, ва fi кѫтѹл рацii $a^m:b^m$.

§. 321. Пе лѫпгъ ачеstea fiind къ este $\sqrt{b}=\sqrt{aq}$, ші $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{q}$; кѫтѹл рацii $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ ва fi $\sqrt{q}$, saŭ ачесте ръdъчіпĭ sѫпt ѫп рапорt sѹбtdѹплікаt ал кътімілор a ші b. Asemenea ва fi $\sqrt[3]{q}$ кѫтѹл рацiĭ $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$, saŭ ачесте рацiĭ sѫпt ѫп рапорt sѹбtріплікаt ал кътімілор a ші b. De обще fiind къ $\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{aq}$, ші $\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{q}$, кѫтѹл рацii $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}$ ва fi $=\sqrt[m]{q}$.

§. 322. Фіе p ші q кѫтѹріле рацiілор $a:b$, ші $c:d$; adікъ $b=ap$, $d=cq$: ші $\frac{b}{d}=\frac{ap}{cq}$. Dакъ ачесте екѹацiĭ se вор ѫмпърцi прin $\frac{a}{c}$ ва da $\frac{b}{d}:\frac{a}{c}=\frac{ap}{cq}:\frac{a}{c}$ $=\frac{ap}{cq}\times\frac{c}{a}=\frac{p}{q}$, adікъ $\frac{p}{q}$ ва fi кѫтѹл рацii $\frac{a}{c}:\frac{b}{d}$.

Dакъ рацiiле $a:b$, $c:d$ вор fi d'опotpiвъ, fiind $p=q$, ва fi шi $\frac{p}{q}=1$ шi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

§. 323. Пропорцie цеоmetpiкъ este eкхацia ꙟntpe doъ рацiї d'опotpiвъ. Adiкъ dакъ рацiiле $a:b$, $c:d$ вор fi d'опotpiвъ, екхацia $a:b=c:d$ ва fi о пропорцie, каре se ва чiti ast fел: a se аре кътре b прекхm c кътре d. De aiчї ꙟnainte sхбt пропорцie se ва ꙟnцелеце tot d'aхпа чеа цеоmetpiкъ, орї кꙟnd nх se ва ziче къ este apitmetiкъ. Кътimiле a, b, c, d sꙟnt цеоmetpiче пропорцiонале, a шi d tермепї de mapцine, b шi c tерminiї de miжлок.

§. 324. Фiind къ ꙟn пропорцia $a:b=c:d$ amꙟndoъ рацiiле sꙟnt d'опotpiвъ, шi кꙟtхpiле лор тpeбхе sъ fie d'опotpiвъ; de a еѕа $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ §. 311.

Dакъ amꙟndoъ пърцiле але ачещiї екхацiї se вор ꙟmmхлцi прiн ac, ва ешi $bc=ad$. Аша dap ꙟn орї каре пропорцie продхкtхл tерminiлор de miжлок este d'опotpiвъ кх продхкtхл tерminiлор de mapцine.

§. 325. Dꙟndх-se tpeї tермепї a, b, c ꙟn пропорцie, se ва поatеа afла шi ал patpхлеа x. Фiind къ dхпъ кondiцie тpeбхе sъ fie $a:b=c:x$, кꙟtхл рацii челiї dintꙟї ва fi кхnoskхt, шi deопotpiвъ кх $\frac{b}{a}$; fiind къ ꙟnsъ чеа-л-алtъ рацie $c:x$ аре ачелаш кꙟt, ва fi $x=\frac{b}{a}$.

§. 312. Saх dхпъ §. 324. sъ se факъ екхацi

$ax=bc$, каре ꙟпърцindꙋ-se прin a ва fi $x=\frac{bc}{a}$.
Кꙋ ачeste доъ кiпꙋрї se поате гъsi орї каре алт терmin прin чеї-л-алцї. S. п. $7:x=3:15$, дъ $x=\frac{7.15}{3}=35$. Саꙋ din $x:3a=5b:(3a-5b)$ гъsim $x=\frac{15ab}{3a-5b}$. шчл.

§. 326. **Пропорцiе цеометрiкъ континъ** este ачеѣа ꙟn каре термеni de mijлок sꙟnt d'опотрiвъ, $a:b=b:c$. Ачeщї трeї терminї a, b, c se zik, континꙋї пропорцiоналї; b este **терminꙋл чел de mijлок саꙋ чеа de mijлок цеометрiкъ** ꙟntре кътimеа a шi c; шi c este **атрeѣа континъ** ла кътimiле a шi b.

§. 327. Din $a:b=b:c$ se фаче $b^2=ac$ §. 324. de ꙋnde $b=\sqrt{ac}$. **Терminꙋл de mijлок цеометрiк ꙟntре доъ нꙋmере este дар d'опотрiвъ кꙋ ръдъчiна пътратъ din продꙋктꙋл ачелор нꙋmере.** Дакъ екꙋацiа $ac=b^2$ se ва ꙟmпърцi прin a, ва еші $c=\frac{b^2}{a}$, **саꙋ терminꙋл атреiлеа континоꙋ пропорцiонал este d'опотрiвъ кꙋ пътратꙋл терminꙋлꙋї de mijлок, ꙟmпърцiт прin чел d'ꙟntꙟiꙋ.**

§. 328. De se ва да терminꙋл чел d'ꙟntꙟї a шi кꙟtꙋл q ал ꙋнеї пропорцiї континꙋе, se пот гъsi шi чеї-л-алцї терminї. Терminꙋл чел de mijлок, ка konsекꙋent ꙟn рацiа чеа d'ꙟntꙟї, ва fi $=aq$ §. 312; шi fiind къ ачелаш este шi антечеdent ꙟn рацiа а doъа, терminȣл ал треiлеа ва fi $= aq \,.\, q = cq^2$. De ачееа ачещĭ треĭ терmenĭ $a : aq = aq : aq^2$ fак о пропорцiе kontinȣъ.

§ 329. 1) Sъ se ꙟmпарцъ amꙟndoъ пърцiле екȣацii $ad = bc$ прiп ab, шi ва fi $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. Шi fiind къ рацiiле $b : d$ шi $a : c$ аȣ кътрĭ d'опотрiвъ, ва fi шi $a : c = b : d$ саȣ $b : d = a : c$.

2) Dакъ ачееаш екȣацiе se ва ꙟmпърцi прiп ac ва еши $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, de ȣnde прiпtр'о asemeneа конкл8зiе se вор dedȣче пропорцiiле $a : b = c : d$ саȣ $c : d = a : b$.

3) Ачееаш екȣацiе ꙟmпърцitъ прiп bd, dъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ аша dар ва fi шi $b : a = d : c$, саȣ $d : c = b : a$.

4) Ꙟn чеа maĭ dȣпъ ȣрmъ ачееаш екȣацiе ꙟmпърцitъ прiп cd prodȣче $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, de ȣnde ȣрmеазъ $c : a = d : b$, саȣ $d : b = c : a$. Аша dар, dакъ amꙟndoъ пърцiле ачелiаш екȣацiĭ se вор desfаче ꙟn doĭ fъкъtорĭ, ачещĭ patрȣ fъкъtорĭ sꙟnt пропорцiоналĭ ꙟn opt fелȣрĭ de ашезърĭ. Аdiкъ fie каре fъкъtор ал ȣnеĭ пърцĭ а екȣацiiĭ se ва авеа къtре fie каре fъкъtор ал челĭ de а doiлеа, прекȣm челъ-л-алt fъкъtор ал ачещiĭ de а doiлеа парtе, къtре челъ-л-алt fъкъtор ал челiĭ d'ꙟntꙟĭ.

Sпр. п.

$2x = 3y$ ва da $x : y = 3 : 2$

$x = my$ dъ $x : y = m : 1$, пеntрȣ къ $x = x.1$;

din $ay - a = mb$ ȣрmеазъ $a : b = m : y - 1$. шчл.

§. 330. Dintp'o пропорціе ӌеометрікъ se пот dedѫче маї мѫлте алтеле прін пермѫтаціа термінілор.

Adікъ dакъ ѫн пропорціа:

1) $a : b = c : d$.

se вор ѫntoapче термені раціілор, ва fi ші:

2) $b : a = d : c$.

Dакъ термені de міжлок se вор skімба, пропорціа dintѫї ва fi:

3) $a : c = b : d$.

Dintp'ачеаста прін skімбареа раціілор гъsім:

4) $c : a = d : b$.

Dакъ ѫн пропорціа d'ѫntѫї se вор skімба терміні чеї de марӌіне:

5) $d : b = a : c$.

Dintp'ачеаста прін skімбареа раціілор ва еші:

6) $b : d = a : c$.

Ѫn чеа маї dѫпъ ѫрмъ, de se вор skімба de o datъ терміні de міжлок ші чеї de марӌіне ѫn пропорціа чеа dintѫї вом afла:

7) $d \cdot c = b : a$.

Ші ѫntopкѫndѫ-se ачесте раціï:

8) $c : d = a : b$.

Adевърѫл ачестор пропозіціï se demonstpeazъ, dакъ din чеа dintѫі пропорціе $a : b = c : d$ se ва фаче екѫаціа $ad = bc$, din каре dѫпъ ачеа se пот dedѫче челе-л-алте шапте de маї sѫs аpътате екѫаціï, прін methodѫл dела §. 329. Dакъ кътіміле раціілор $a : b$ ші $c : d$ нѫ вор fi de ачелаш neam, атѫнчї терміниї нѫ se вор пѫтеа мѫта dintp'o раціе ѫntp'алта, пентрѫ къ кътіміле етероӌене нѫ аѫ ѫntpe еле нічї o релаціе.

De ачеа ла ачеastъ ɫntɫmпларе перmsтaцiiле dela нsmepiле 3, 4, 5, 6 нs se пot face.

§. 331. De se вор afла maĭ msлte paцiĭ d'опоtpiвъ $a : b = c : d = e : f$, шчл., ва fi шi $(a + c + e \ldots)$: $(b + d + f \ldots) = a : b = c : d =$ шчл. Dsпъ §. 316. sъma antecedenцiлор кътpe sъma konsecsenцiлор ва авеа ачелаш paпopt прекsm fie кape antecedent кътpe konsecsentsл съŭ; de ачеа ачeste кътimĭ sɫnt ɫn пропорцie.

§. 332. Din пропорцia $a : b = c : d$ aĭ кърia teminĭ sъ fie omoцenĭ, se поate face konклszie къ:

1) $(a + c) : (b + d) = a : b = c : d$.

2) $(a - c) : (b - d) = a : b = c : d$;

saŭ $(c - a) : (d - b) = a : b = c : d$, кɫnd ва fi $c > a$ шi $d > b$. Dsпъ §. 316. шi §. 317. sъmeле шi difepenцeле tepmeniлор omoцenĭ aĭ paцiiлор d'o-потpiвъ se'aŭ ɫntpe еле, прекsm fie кape antecedent кътpe konsecsentsл съŭ. Adикъ ɫn fie кape пропорцie, sъma saŭ difepenцa antecedenцiлор se ape кътpe sъma saŭ difepenцa konsecsenцiлор, прекsm fie кape antecedent кътpe konsecsentsл съŭ.

§. 333. De ва fi $a : b = c : d$ шi $f : g = c : d$, ва fi шi $a : b = f : g$. Пentps къ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ шi iаpъш $\frac{g}{f} = \frac{d}{c}$; de ачеа $\frac{b}{a} = \frac{g}{f}$, saŭ $a : b = f : g$.

§. 334. Aкsm fiind къ este $\left.\begin{array}{l}(a+c) : (b+d) = a : b \\ (a-c) : (b-d) = a : b\end{array}\right\}$ §. 332.

ва fi пpin spmape шi $(a+c) : (b+d) = (a-c) : (b-d)$

Аша dар ꙟn орї каре пропорціе (аї кърia termenї sꙟnt omoџenї) sꙋмеле antечеdenцiлор шi але konsекꙋenцiлор sꙟnt пропорціоnале кꙋ difepenцеле лор.

§. 335. Кꙟnd кꙟte патрꙋ termenї аї ꙋнеї пропорцiї $a:b=c:d$ вор fi omoџenї, ка съ se поатъ skimба termeni de міжлок, ва fi шi $a:c=b:d$. Dintp'ачеasta dꙋпъ §. 332. ꙋрmeaзъ $(a\pm b):(c\pm d)=a:c=b:d$. Шi dꙋпъ §. 334. $(a+b):(c+d)=(a-b):c-d)$. Dар fiind къ asemenea пропpietate пот авеа шi ачеле пропорцiї аї кърора termenї нꙋ sꙟnt de ачелаш неam, тpeбꙋе съ se demonstpeze пpintp'ꙋn калкꙋл џенерал, каре съ нꙋ se atꙟpne de §. 332.

§. 336. Фiind q кꙟtꙋл пропорцiї $a:b=c:d$; din каре $b=aq$, $d=bq$ ва fi шi:

1) $$\frac{a}{a\pm b}=\frac{a}{a\pm aq}=\frac{1}{1\pm q}$$

$$\frac{c}{c\pm d}=\frac{c}{c\pm cq}=\frac{1}{1\pm q}.$$

De ачеea $(a\pm b):a=(c\pm d):c$

2) $$\frac{b}{a\pm b}=\frac{aq}{a\pm aq}=\frac{q}{1\pm q}.$$

$$\frac{d}{c\pm d}=\frac{cq}{c\pm cq}=\frac{q}{1\pm q}$$

Аша dар шi $(a\pm b):b=(c\pm d):d$.

3) $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{a-aq}{a+aq}=\frac{1-q}{1+q}$$

$$\frac{c-d}{c+d}=\frac{c-cq}{c+cq}=\frac{1-q}{1+q}.$$

Adiкъ $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

Аша dар ꙟn орї каре пропорціе sꙋма saꙋ difepenцa terminiлор ꙋнеї рацiї se аре кътре antечеdentȣл saȣ̆ кътре кон-секȣentȣл съȣ̆, прекȣm sȣma saȣ̆ difeренца терminiлор челор-л-алте рацiĭ кътре antечеdentȣл saȣ̆ кътре konse-кȣentȣл съȣ̆.

Шi ал doiлеа sȣma терminiлор ȣнеĭ рацiĭ se аре кътре difeренца лор, прекȣm sȣma терminiлор челор-л-алте рацiĭ iаръш кътре difeренца лор.

§. 337. Прекȣm кѫтȣл рацiеi пȣ se skimбъ, dакъ amѫndoĭ терmeni еĭ se вор ѫmmȣлцi, saȣ̆ se вор ѫmпърцi printр'ачелаш пȣmър §. 314. аша шi пропорцiа $a : b = c : d$ пȣ se stрiкъ, dакъ терmini рацiiлор $a : b$ saȣ̆ $c : d$ se вор ѫmmȣлцi saȣ̆ se вор ѫmпърцi прin орĭ каре пȣmър. Adiкъ ва fi шi $am : bm = c : d$; $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$; saȣ̆ iаръш $\frac{am}{n} : \frac{bm}{n} = c : d$, ȣnde m, n, репрezentеаzъ орĭ каре пȣмере.

§. 338. Dакъ терmini de miжлок аĭ пропорцiеi $a : b = c : d$ se вор skimба, вом авеа $a : c = b : d$ §. 330. Dар dȣпе §. 337. ва fi шi $\frac{am}{n} : \frac{cm}{n} = b : d$; de ачеа de se вор skimба iаръш терmini de miжлок аĭ пропорцiеi челеi din ȣрmъ, ва fi: $\frac{am}{n} : b = \frac{cm}{n} : d$. Din каре ȣрmеазъ къ пропорцiопалitatеа пȣ se stрiкъ, dакъ терminȣл чел d'ѫntѫĭ шi чел d'ал doiлеа deodатъ se вор ѫmmȣлцi saȣ̆ se вор ѫmпърцi printр'ачелаш пȣmър. Ачеаш пропрietate s'а doведit шi ѫn §. 337. пentрȣ ѫntѫiȣл шi ал doiлеа терmin, шi fiind къ asemeneа se поate doвedi ші пentpȣ ал тpeiлea ші чел dȣпъ ȣpmъ: пpопорціопалitatea тepminiлор ꙟп пpопорціа ціеometpікъ пȣ se sкimбъ, dакъ fie кape тepmin de марціпe ші fie кape de miжлок se ва ꙟmmȣлці saȣ se ва ꙟmпърці пpintp'ачелаш пȣmъp. Аша dap de ва fi $a:b=c:d$, ва fi ші $afm:bgm=cfn:dgn$, ші din пpotiвъ, ꙟпsemпꙟпdȣ-se пpin літеріле f, g, m, n, орі кape fъкъtорі saȣ fpꙟпцері.

§. 339. Ꙟп пȣtepea ачещіі пропріетъці пропорціїле se пot sкъпа de fpꙟпцері, ші se пot pedȣче ла тepmini чеі маі simплі. Аша dакъ ꙟп пpопорціа $a:b=\frac{5}{21}:\frac{20}{7}$ тepmini ꙟп a doъа раціе se вор ꙟmпърці пpin 5, ва fi $a:b=\frac{1}{21}:\frac{4}{7}$; ші dакъ ачеаsta a doъа раціе se ва ꙟmmȣлці пpin 21, ва еші $a:b=1:12$. Asemenea din $2\frac{2}{5}:x=4\frac{1}{2}:5\frac{1}{4}$, saȣ $\frac{12}{5}:x=\frac{9}{2}:\frac{21}{4}$, ꙗаsъ $\frac{12}{5}:x=6:7$; ші dакъ тepminȣл d'ꙟntꙟі ші чел de ал тpeiлea se ва ꙟmпърці кȣ 6 ші se ва ꙟmmȣлці кȣ 5, ва fi: $2:x=5:7$.

§. 340. Asemenea ꙗаръш пpintp'ачеаш пpопріetate §. 338. тepmini пpопорціілор se пot sкъпа de fъкъtорі. Dакъ adeкъ din пpопорціа $fa:gb=c:d$ se ва къȣta раціа ꙟntpe a ші b, se ва ꙟmпърці тepminȣл чел d'ꙟntꙟі ші чел d'ал тpeiлea пpin f, ал doiлea ші ал паtpȣлea пpin g, ші ва fi $a:b=\frac{c}{f}:\frac{d}{g}$.

Dакъ ꙟntp'ачеаstъ пpопорціе dȣпъ ȣpmъ se ва ꙟmmȣлці adoъа раціе пpin fg, ва fi $a:b=cg:df$. Аша dap ꙗаръш ꙟп пpопорціа ціеometpiкъ fъкъtорі se пot mȣta dintp'ȣп тepmin de марціпe ла челъ-л-алт saȣ dintp'ȣп тepmin de miжлок ла челъ-л-алт.

S. п. $8a : 9b = 12 : 36$ dъ $a : b = \frac{12}{8} : \frac{36}{9} = \frac{3}{2} : 4 = 3 : 8$.
Saȣ ꙗръш $a : b = 12 . 9 : 36 . 8 = 3 : 8$.
Asemenea ші $27x : 18 = 35 : 25$ dъ:
$3x : 2 = 7 : 5$ ші $x : 2 = 7 . 5 . 3 = 7 : 15$.
Dȣпъ ачеasta din $5a : 7b = 2 : 3$, ȣрmeazъ $a : b = 2 . 7 : 3 . 5 = 14 : 15$.

§. 341. Dакъ dоъ пропорції $a : b = c : d$ ші $e : f = g : h$ вор авеа кѫтȣрї d'опотрївъ, atȣнчї ші sȣmeле ші difеренцеле терminілор омолоџї вор fi ѫn пропорціе, saȣ $(a \pm c) : (b \pm f) = (c \pm g) : (d \pm h)$ каре ачеasta se арatъ din §. 316. ші §. 317. Ачеаш ȣрmeазъ despre sȣme, пentрȣ орї каре пропорціе, кѫnd кѫtȣріле вор fi d'опotрївъ.

§. 342. De вор fi maї mȣлte пропорції:

$$a : b = c : d$$
$$e : f = g : h$$
$$\underline{k : l = m : n}$$

ва fi ші $aek : bfl = cgm : dhn$. Пentрȣ къ de se вор ziче кѫtȣріле лор p, q, r, dȣпъ §. 318. кѫtȣл рaції $aek : bfl$, ші ал рaції $cgm : dhn$ ва fi $= pqr$, аша dар ачеste рaції sѫnt d'опotрївъ ѫntре еле. Adiкъ dакъ termini омолоџї aї maї mȣлtор пропорції se вор ѫmmȣлці ѫntре eї, продȣкteле вор fi ѫn пропорціе.

§. 343. Фіе maї mȣлte пропорції:

$$a : b = c : d$$
$$b : e = f : g$$
$$e : h = k : l$$

ѫn каре літеріле a, b, e, h репрezenteазъ орї каре кътimї омоџene, ꙗр c, d, f, g шчл. nȣmaї nȣmере.

Din пропорціа dintѫї ва fi $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; ші $b=\frac{d}{c}.a$; din a doъа $\frac{e}{b}=\frac{g}{f}$. ші $e=\frac{g}{f}.b$. Dакъ ѫntp'ачеastъ екѹація ѫn локѹл лѹї b se ва пѹne прецѹл лѹї $\frac{d}{c}.a$, ва еші $e=\frac{dg}{cf}.a$. Dintp'atpeвa пропорціе гъsim $\frac{h}{e}=\frac{l}{k}$ ші $h=\frac{l}{k}.e$, ші dакъ ѫntp'ачеastъ екѹаціе ꙗpъш se ва пѹne ѫn локѹл лѹї e прецѹл лѹї, вом авеа $h=\frac{dgl}{cfk}.a$, saѹ $\frac{h}{a}=\frac{dgl}{cfk}$, de ѹnde $a:h=cfk:dgl$. Dакъ adікъ ѫn маї мѹлte paції konsekѹenції вор fi d'опоtpівъ кѹ anteчedenції раціілор ѹрмъtoape, atѹnчї anteчedentѹл чел d'ѫntѫї se ва авеа кътpe konsekѹentѹл чел dѹпъ ѹpмъ ѫntp'ѹn рапорт компѹs din toate рацііле intepmedie.

Dакъ літеріле a, b, e, h ѫnsemneazъ пѹмере, atѹnчї ачеastъ пропріetate se поate demonstpa маї simплѹ прin кіпѹл ѹpмъtop. Dѹпъ §. 342. авем $abe:beh=cfk:dgl$, de se ва ѫмпърці dap раціа чеа d'ѫntѫї прin ba ва еші $a:h=cfk:dgl$.

§. 344. Dакъ рацііле $a:b$, $c:d$ вор fi d'опоtpівъ, ші кѫtѹл лор q, dѹпъ §. 320. ші рацііле $a^m:b^m$; $c^m:d^m$ вор fi d'опоtpівъ, пentpѹ къ аѹ кѫt комѹn q^m. Adікъ din пропорціа $a:b=c:d$ ѹрмеазъ a fi ші $a^m:b^m=c^m:d^m$. Saѹ пѹtepіле ачелеа sѫnt пропорціонале але кърора ръdъчінї sѫnt ѫn пропорціе.

§. 345. Asemenea se dovedeще прin §. 321. къ este $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$, dакъ ва fi $a:b=c:d$; пentpȣ къ dакъ к↑tȣл раціiлор а doъ пропорціĭ ва fi q, раціiле челiĭ d'↑nt↑ĭ пропорціĭ вор авеа к↑tȣл комȣп $\sqrt[m]{q}$.

Шi ȣпа шi алtа se поаte demonstpa ↑п кiпȣл ȣрмътор. Фiind къ este $ad=bc$, ва fi шi $a^m d^m = b^m c^m$; de ȣnde $a^m : b^m = c^m : d^m$ §. 329. Asemenea ва fi $\sqrt[m]{ad} = \sqrt[m]{bc}$, saȣ $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{b} . \sqrt[m]{c}$, de ачеа $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

§. 346. De ва fi $a : b = cd : ef$, шi ↑ntp'ачеваш време $d:f=g:h$, ва fi шi $a : b = cg : eh$.

Пentpȣ къ fiind прin sȣпoziціе $d : f = g : h$,

шi fiind iаръш $c : e = c : e$

dȣпъ §. 342 ва fi шi $cd : ef = cg : eh$

аша dар прin ȣрмаре $a : b = cg : eh$.

§. 347. Фiе q к↑tȣл раціiлор $a : b$, $c : d$; шi p к↑tȣл раціiлор $e : f$, $g : h$. Dȣпъ §. 322. раціiле $\frac{a}{e} : \frac{b}{f}$ шi $\frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ вор авеа ȣп к↑t комȣп $\frac{p}{q}$, de ачеа вор fi deoпotpiвъ.

Adiкъ de вор fi $a : b = c : d$

шi $e : f = g : h$

ва fi шi $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$.

Adeкъ tepmini ȣпеĭ пропорціĭ ↑мпърціndȣ-se прin tepmini алtеĭ пропорціĭ, к↑tȣpiле вор fi ↑п пропорціе.

§. 348. De ва fi $a : b = \frac{c}{d} : \frac{e}{f}$, ші $d : f = g : h$

ав fi ші $a : b = \frac{c}{g} : \frac{e}{h}$.

Пentpȣ къ fiind $c : e = c : e$ ші прin sȣпoziціe

$$\frac{\begin{array}{c} \\ d : f = g : h \end{array}}{}$$

dȣпъ §. 347. ва fi ші $\frac{c}{d} : \frac{e}{f} = \frac{c}{g} : \frac{e}{h}$, de ачеа прin ȣрмаре $a : b = \frac{c}{g} : \frac{c}{h}$.

§. 349. De ва fi $a : b = c : d$

ші $b : e = d : f$

ва fi ші $a : e = c : f$

Фіе p, q кътȣріле пропорціілор челїї d'ънтъї ші челїї de a doiлеа. Фіind $e = bq$, ші $b = ap$, ва fi ші $e = apq$ ші $\frac{c}{a} = pq$. Dȣпъ ачеasta fiind $f = dq$ ші $d = cp$, ва fi ші $f = cpq$ ші $\frac{f}{c} = pq$. Раціiле $a : e$ ші $c : f$ sънt d'опotpівъ, пentpȣ къ аȣ ачелаш кът pq, de ачеа ва fi $a : e = c : f$.

Adiкъ daкъ konseкȣenці ȣнеї пропорціï вор fi d'опotpівъ кȣ antечеdenціï алtia, чеї-л-алці термінї вор fi dea dpentȣл пропорціоналї.

§. 350. Sъ не ънкіпȣim $a : b = c : d$

ші $a : e = c : f$

Ла ачеastъ ънтъмпларе ва fi $b : e = d : f$.

Пentpȣ къ de se вор ꙟntoapчe рацiiле челiĭ d'ꙟntꙟĭ пропорцiĭ, шi de se ва skpi чѣа de a doiлѣа sȣбt a-чѣаsta, ва еши:

$$b : a = d : c$$
$$\underline{a : e = c : f}$$

de ачеѣа dȣпъ §. 349. $b : e = d : f$.

Аша dap dakъ antечеdenцi рацiiлор ȣ-неĭ пропорцiĭ вор fi d'опotpiвъ кȣ an-tечеdenцi рацiiлор алtia, konsekȣenцi вор fi d'a dpeptȣл пропорцiоналĭ. Ase-менѣа se поate doвedi къ antечеdenцi sꙟnt d'a dpeptȣл пропорцiоналĭ, dakъ konsekȣenцiĭ вор fi d'опotpiвъ.

Adiкъ dакъ $a : b = c : d$

шi $\underline{e : b = f : d}$

ва fi $a : e = c : f$.

§. 351. Акȣm sъ лъъм $a : b = c : d$

шi $\underline{b : e = f : c}$

Ла ачѣаstъ ꙟntꙟmплаpe ва fi $a : e = f : d$

Sъ ziчem къ p, q, sꙟnt кꙟtȣpiле пропорцiiлор челiĭ d'ꙟntꙟĭ шi челiĭ d'a doiлѣа. Фiind $e = bq$ шi $b = aq$ ва fi шi $e = apq$, dintp'ачѣаsta $\frac{e}{a} = pq$. Dȣпъ a-чеѣа fiind $d = cp$ шi $c = fq$ ва fi шi $d = fpq$, de ȣnde $\frac{d}{f} = pq$. Рацiiле dap $a : e$, $f : d$ aȣ ачелаш кꙟt pq, de ачеѣа ва fi $a : e = f : d$. Adiкъ dакъ tepmini чеĭ de miжлок aĭ ȣнеĭ пропор-цiĭ вор fi d'опotpiвъ кȣ tepmini de map-цiне aĭ алteĭ пропорцiĭ, чеĭ-л-алцĭ tep-minĭ вор fi ꙟn пропорцie ꙟntoapsъ.

§. 352. De ва fi $a : b = c : d$
ші $a : e = f : d$
se поate zіче къ este ші $b : e = f : c$.

Къчї dakъ se вор ꙟntoарче рацііле пропорції челії d'ꙟntꙟї ші de desȣbtȣл ачещіа se ва skріе a doъa пропорціе, вом авеа:

$$\begin{array}{l} b : a = d : c \\ \underline{a : e = f : d} \\ b : e = f : c. \end{array}$$

De ачеea dȣпъ §. 351. $b : e = f : c$.

Аша dap dakъ tepmini de марціне aї ȣнеї пропорції вор fi d'onotрівъ кȣ tepmini de марціне aї алтia, tepmini de міжлo вор fi ꙟn пропорціе ꙟntoapсъ.

Asemenea se dovedeще къ tepmini de марціне sꙟnt ꙟn пропорціе ꙟntoapsъ, dakъ tepmini de міжлок sꙟnt d'onotрівъ.

Adiкъ, dakъ $a : b = c : d$
ші $e : b = c : f$
ва fi $a : e = f : d$

§. 353. Пꙟнъ акȣm s'aȣ аpътat пропріетъціле ценерале але пропорціілор. Iskodipea de a afла ші алте рацiї але кътiмілор se ва лъsa ла deosebiteле екzерчіції matematiче, ꙟn кape se apatъ sпеціал deosebiteле пропріетъцї але кътімілор. Акȣm se вор аръta апліkaції спре oape кape tꙟлмъчіре ачелор dȣпъ ȣрмъ регȣле ценерале.

§. 354. Пpin регȣла de aȣp saȣ регȣла de tpeї se ꙟnцелеце metoda de a se гъsi a патpa цeometрікъ пропорціоналъ din tpeї tepminї aї ȣнеї пропорції. Пentpȣ a se deslega ачest feл de ꙟntpeбъpї tpeбȣeще o mape въгаре de seamъ ла amezapea tepminілор пропорції. Къчї dȣпъ ачeastъ ашъzаре лesne se поate гъsi ал паtрȣлеа терmінȣ прін §. 325.

§. 355. Sъ zічem къ кътimiле A ші b sпꙟnzȣръ ast feл dела кътimiле A ші a, ꙟnкꙟt sъ fie $b=nB$, atȣnчї ва fi $a=nA$, ȣnde n поate sъ ꙟnsemneze opї каре пȣмър. Sȣбt ачeastъ коndiціе раціiле $A:a$, $B:b$ sꙟnt d'опоtрівъ, ші asemenea коndiціï se zік къ sꙟnt dea dpeпtȣл пропорціонале, saȣ $A:a=B:b$.

Dакъ ꙟnsъ кътimiле B ші b вор sпꙟnzȣра de ла кътimiле A ші a asfeл ꙟnкꙟt sъ fie $b=\frac{B}{n}$ кꙟnd ва fi $a=nA$; atȣnчї fiind къ este $B=nb$, раціiле $A:a$ ші $b:B$ вор fi d'опоtрівъ; ші кътimiле A, a, B, b, se zік къ sꙟnt ꙟn пропорціе речіпрокъ, saȣ ꙟn пропорціе ꙟntoapsъ adікъ, $A:a=b:B$ saȣ $a:A=B:b$.

Екzemплȣрї.

1) 40 Коtȣрї de поstaв se вꙟnd 460 de флоріnцї, se чере прецȣл de $3\frac{1}{3}$ коtȣрї. Фіе ачest прецȣ d'опоtрівъ лȣї x.

Sъ se ашеze кътimiле корespondente ꙟntpe еле dȣпъ кȣm ȣрmeazъ:

40 коцї. 460 флоріnцї.
$3\frac{1}{3}$ коцї. x флоріnцї.

Акȣm se фаче кібzȣіре din коndiціiле ꙟntpeбърі, dакъ пȣмърȣл чepȣt x требȣе sъ ese maї mape saȣ maї mік декꙟt кътimea каре ꙟї este omoцenъ, saȣ 460 флоріnцї; dакъ atȣnчї кътimea че корespȣnde ла x, adeкъ $3\frac{1}{3}$ коцї, ва fi maї mape saȣ maї mікъ декꙟt кътimea каре ꙟї este omoцenъ (adікъ декꙟt 40 коtȣрї), пропорціа ва fi dpeaптъ прекѫm ꙟntр'ачеst екzемплѫ. Se ва аѩъzа dар пропорціа:

$$40 : 3\tfrac{1}{3} = 460 : x.$$

каре adѫкꙟndѫ-se ла терmini чеї mаї simплі ва da:

$$3 : 5 = 23 : x$$

de ѫnde se гъсеще $x = \frac{5 \cdot 23}{3} = 38$ флор. 20 кръіцарї.

2) Ѫn кѫріер фъкꙟnd пе toatъ zioa 5 mілѫрї съвꙟрша-ще ѫn dрѫm оаре каре ꙟn 14 zілe; ꙟn кꙟtъ време ар пѫtea съвꙟрші ачеst dрѫm, dакъ ар лѫа кꙟte 8 mілѫрї пе zi:

5 mіл.	14 zіл.
8 mіл.	x zіл.

Кѫ кꙟt mаї mѫлte mілѫрї se вор фаче ꙟntр'о zi, atꙟt mаї пѫціnъ време ва требѫі пentрѫ а съвꙟрші tot dрѫmѫл; de ачеа ꙟntр'ачеst екzемплѫ кътimea черѫtъ x ва fi mаї mікъ dекꙟt omoцепа еї, saѫ dекꙟt 14 zілe, atѫnчї пѫmърѫл mілелор, 8, каре коresпѫnde ла x este mаї маре dекꙟt кътimea че ꙟї este omoцепъ, saѫ dекꙟt 5 mілѫрї. Аша dар пропорціа este речіпрокъ ші терmini требъе съ se ашеze ꙟntр'ачеst кіп:

$$8 : 5 = 14 : x$$

$$\text{saѫ} \quad 4 : 5 = 7 : x$$

De ѫnde $x = \frac{5 \cdot 7}{4} = 8\frac{3}{4}$ zілe.

3) Ѫn кѫріер кѫ ѫmблеt d'опоtрівъ фаче ꙟn 3 zілe 10 mілѫрї, ꙟn кꙟtъ време se пot фаче 56 mілѫрі?

10 m. 3 z.	$10 : 56 = 3 : x$
56 m. x z.	$5 : 28 = 3 : x$
	dъ $x = \frac{28 \cdot 3}{5} = 16\frac{4}{5}$ zілe.

4) 1260 Мъsȣрĭ de грîȣ ажȣнг întp'o време datъ пентрȣ 270 miлitapĭ; кîte мъsȣрĭ пот fi требȣinчioase întp'ачеваш време пентрȣ 2880 miлitapĭ?

270 miл. 1260 мъs. | $270:2880=1260:x$
2880 miл. x мъs. | $1:32=420:x$

de ȣnde $x=32.420=13440$ мъsȣрĭ.

5) O провizie саре каре ажȣнџе пентрȣ 360 miлitapĭ în 6 лȣнĭ; în кîтъ време ва ажȣнџе ачеваш провizie пентрȣ 880 miлitapĭ?

360 miл. 6 лȣнĭ. || $880:360=6:x$
880 miл. x лȣнĭ. || $11:9=3:x$

$x=\frac{9\cdot3}{11}=2$ лȣнĭ 13 ziле.

6) O fîntînъ каре кȣрџе d'опотрivъ în 7 minȣte дъ $5\frac{2}{3}$ ока de апъ, în кîтъ време se ва ȣмплеа ȣн vas de 37 ока?

$5\frac{2}{3}$ ок. 7 min. || $5\frac{2}{3}:37=7:x$
37 ок. x min. || $17:37=21:x$

$x=\frac{37\cdot21}{17}=45\frac{12}{17}$ minȣte.

7) 25 Лȣкрътоpĭ fак ȣн zid de 150 stînжenĭ лȣнгȣл întp'o време datъ; dакъ întp'ачеваш време ва требȣi sъ se facъ ȣн zid tot atît de înaлt шi de грos, dap de 340 stînж. de лȣнгȣ, кîцĭ лȣкрътоpĭ требȣesкȣ?

150 stînж. 25 лȣкр. || $150:340=25:x$
340 stînж. x лȣкр. || $3:24=5:x$

$x=\frac{24\cdot5}{3}=56\frac{2}{3}$. Аша dap 57 лȣкрътоpĭ.

XXVI.

8) 24 Лȣкрътopĭ isпрьвескȣ̆ ȣп лȣкрȣ оаре каре ꙟн 15 zіле; кꙟцї лȣкрътopĭ ар тревȣї dакъ s'ар чере съ se isпръвꙗsъ ачелаш лȣкрȣ ꙟн 9 zіле.

15 zіл. 24 лȣкр.	$9 : 15 = 24 : x$
9 zіл. x лȣкр.	$1 : 5 = 8 : x$

$x = 5 . 8 = 40$ лȣкрътopĭ.

9) Dакъ 100 флоpінцї daȣ̆ dобіndъ 5 флоpінцї пе an, че dобꙟndъ пot da 3635 флоpінцї?

100 фл. 5 dоб.	$100 : 3635 = 5 : x$
3635 фл. x dоб.	

$x = \frac{3635.5}{100} = 181,75$ фл. $=$ 181 флор. 45 кръiц.

10) Dакъ 100 флор. daȣ̆ dобꙟndъ пе an $2\frac{1}{2}$ флор. кꙟt капітал тревȣеще ка съ dea о dобꙟndъ de 650 фл. пе an?

$2\frac{1}{2}$ dоб. 100 фл. капіt.	$2\frac{1}{2} : 650 = 100 : x$
650 dоб. x фл. капіt.	$1 : 260 = 100 : x$

$x = 26000$ флоpінцї.

11) Оаре чіне а кыщігаt ꙟntр'ȣп an кȣ 540 флоpінцї 120 фл.; врем съ афлъm че dобꙟndъ а лȣаt ла 100?

540 фл. 120 dобꙟndъ.	$540 : 100 = 120 : x$
100 фл. x dобꙟndъ.	$9 : 5 = 40 : x$

$x = \frac{5 . 40}{9} = 22\frac{2}{9}$ фл.

12) 35 пічіоаре паpisіене sꙟnt d'опоtрівъ кȣ 36 пічіоаре віенеze; 237 пічіоаре de Паpis кꙟtе de Віена фак?

35' пар. 36' віеn.	$35 : 237 = 36 : x$
237' пар. x' віеn.	

$x = \frac{237.36}{35} = 243$ піч. $9\frac{9}{35}$ deџete.

Ꙟn пропорціa ачестѫĭ екземплѫ antечеdenці, adекъ 35 пічioape napisiene ші 36 пічioape вieneze sѫnt d'опотрівъ, de ачеѕа ші konsекѫenці tребѫе sъ fie d'опотрівъ, saѫ 243 пічioape вieneze sѫnt еквівалente кѫ 237 пічioape napisiene.

13) Пічiорѫл napisian se аре кътре пічiорѫл вienez прекѫm 1,02764 : 1; кѫte пічioape вieneze фак 237 napisiene?

Фiind къ пічiорѫл французеsкѫ este maĭ mape dекѫt чел вienez, 237 пічioape французещĭ tребѫе sъ фaкъ maĭ mѫлte вieneze, de ачеѕа se ва ашъза пропорціа прекѫm ѫpmeaзъ:

$1 : 1,02764 = 237 : x$

din каpе ese $x = 1,02764 \times 237 = 243,55068$

saѫ $x = 243'\ 6''\ 7'''$. mъsѫpĭ вieneze.

14) 237. пічioape de Biena кѫte пічioape de Лondpa фак? Dакъ раnopтѫл ѫntpe ачeste пічioape ва fi nекѫnoskѫt, sъ ведem dакъ ачesta se поate гъsi npin paпopтѫpiле intepmediape. Съ se zікъ пічiopѫл Лondpi L ал Парisѫлѫĭ P ші ал Bieni V.

Акѫm se ва авеа $L : P = 15 : 16$

ші $P : V = 36 : 35$

npin ѫpmape ва fi $L : V = 15 . 36 : 16 . 35$ (§. 343.)

saѫ pedѫкѫndъ-se paпopтѫл ла tepmini чеĭ maĭ simплі $L : V = 3.9 : 4.7 = 27 : 28$.

Аша dap fiind къ пічiорѫл de Biena este maĭ mape dекѫt чел de Лondpa, sъ se zікъ прекѫm ѫn №. 13, npin пропорціе ѫntoapsъ

$27 : 28 = 237 : x$

saѫ $9 : 28 = 79 : x$ din каpе пропорціе ese

$x = \frac{28 . 79}{9} = 245\frac{7}{9}$ піч. de Лon. Saѫ, ѫn пропорціa $L : V = 27 : 28$ ѫpmeaзъ a fi $27\,V = 28\,L$. Аша dap fiind къ 27 пічіоаре de Biena sꙟnt екsївалente кs 28 пічіоаре de Лondpa, съ se zікъ прекsm ꙟn №. 22, ꙟn пропорціе dpeaптъ $27 V : 237 V = 28 L : x L$ de snde ꙟаръш ва еші $x = \frac{28.79}{9} = 245\frac{7}{9} L$.

§. 356. Съ не ꙟнкінsim къ кътімеа M ꙟнтнzsръ asfeл dела кътімеа A, B, C, прекsm m ꙟнтнzsръ dела a, b, c, snde asemeneа літере ꙟаръш asemeneа кътімї ꙟnsemneazъ. Акsm dакъ кътіміле каре sꙟnt оmоцене лsї M ші m se вор авеа ꙟntpe еле ꙟn пропорціе konstantъ ші dpeaптъ, прекsm доъ din кътіміле A, B, C, ші a, b, c, atsнчї ші челе-л-алте вор fi d'опътрівъ, ші рапортsл $M : m$ ва fi компsс din рапортsріле dpente $A:a$, $B:b$, $C:c$. Каре se доведеще ꙟntp'ачest кіп.

Фіе коресппsnzътор M ла кътіміле A, B, C.
» » N ла . . . . a, B, C.
» » P ла . . . . a, b, C.
» » m ла . . . . a, b, c.

snde літеріле d'опотрівъ ꙟnsemneazъ ꙟаръш кътімї d'опотрівъ. Дsпъ sппоziціа de maї sss ва fi dap:

$M : N = A : a$, пentps къ B, ші C sꙟnt комsпе ла M ші N.

$N : P = B : b$, пentps къ sꙟnt комsпе a ші C.

$P : m = C : c$, пentps къ sꙟnt комsпе a ші b.

De ачееа $M : m = ABC : abc$. §. 343.

Dакъ ꙟnsъ ꙟntpe рапортsріле simпле de maї sss аръtate, snsл saš maї mslte вор fi речіпроче, рапортsл $M : m$ ва fi компsс о парте din пропорціï dpente ші о парте din речіпроче. Adікъ de ва fi:

$$\begin{aligned} M &: N = A : a \\ N &: P = B : b \\ P &: m = c : C \end{aligned}$$

atsпчї ва fi $M : m = ABc : abC = \frac{AB}{C} : \frac{ab}{c}$, adікъ ꙟn рапорт компꙋs din рапортꙋріле дренте $A:a$, $B:b$, ші din речіпрокꙋл $c:C$.

Екzemплꙋрї.

1) 3 Коцї постав de 2 коцї de лат kostiseще 36 fл.; se чере прецꙋл a 5 котꙋрї de asemenea постав ꙟнsъ de $\frac{7}{4}$ de лат.

3 лꙋнг. 2 лат. 36 fл.
5 лꙋнг. $\frac{7}{4}$ лат. x fл.

Лꙋꙟndꙋ-se ачееаш кътime a постaвꙋлꙋї, прецꙋл x ва fi кꙋ atꙟt maї mape, кꙋ кꙟt maї mape este лꙋнџimea; ші лꙋꙟndꙋ-se ачееаш лꙋнџime, прецꙋл ва fi кꙋ atꙟt maї mik, кꙋ кꙟt maї mikъ ва fi лъцimea; аша dap прецꙋріле sꙟnt ꙟntр'ꙋн рапорт компꙋs din рапортꙋріле dpenтe але лꙋнџimilop ші лъцimilop; saꙋ:

$$3.2 : 5.\frac{7}{4} = 36 : x$$
$$2 : 35 = 3 : x$$

De ꙋnde $x = \frac{35 . 3}{2} = 52\frac{1}{2}$ fл.

2) О шꙟпъ de fiep de 6 пічioape лꙋнгъ, 4 деџете латъ, 2 деџете гроасъ кꙟнтъреще 144 fꙋнцї; че грeꙋtate ва авеа алтъ шꙟпъ de fiep 5 піч. лꙋнгъ 5 деџете латъ, 3 деџете гроасъ?

$6'$ лꙋнг. $\frac{1'}{3}$ лат. $\frac{1'}{6}$ гр. 144 fꙋнцї.
$5'$ лꙋнг. $\frac{5'}{12}$ лат. $\frac{1'}{4}$ гр. x fꙋнцї.

Asemenea ші ла ачеастъ ꙟнтꙟмпларе toate рапортꙋріле simпле sꙟnt dpenтe,
de ачееа $6 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} : 5 \times \frac{5}{12} \times \frac{1}{4} = 144 : x$
saꙋ $1 : 25 = 9 : x$ аша dap $x = 225$ fꙋнцї.

Ла калкꙋлꙋл de maї sꙋs dimensiile s'aꙋ редꙋs ла ачееаш мъsꙋръ adikъ ла пічiop, каре ꙟнsъ ла ꙟтꙟмплареа de акѹм н'a fost de требѹinцъ. Se noate адекъ дѹпъ §. 337. sъ se ꙗ деосебite мъсѹрі, dap atѹнчї sъ se еспрімеze кътimiле корespondente ꙟn aмꙟndoï тepmini xnѹї рапорт прінтр'ачеваш ѹніme, адекъ la ꙟтꙟмпларea ачeasta de aічї ва fi:

$$6'.4''.2'' : 5'.5''.3'' = 144 : x$$

saѹ $1 : 25 = 9 : x$ прекѹm s'a zis maї sѹs.

Дакъ 1260 баніце de гpꙟѹ ажѹнгѹ пentpѹ 250 oamenі ꙟn 3 шi $\frac{3}{4}$ лѹnї; ꙟn кꙟtъ вpeme 2400 баніце пot ажѹнџе пentpѹ 780 oameni?

1260 бan. 250 oam. $3\frac{3}{4}$ лѹnї.

2400 бan. 780 oam. x лѹnї.

Вpemea черѹtъ ва fi кѹ atꙟt maї лѹnгъ, кѹ кꙟt maї mape este nѹmърѹл баніцілор, челе-л-алte рътꙟінd d'опоtрівъ; de ачееа ачest paпopt ва fi dpent. Ачеваш вpeme ва fi кѹ atꙟt maї sкѹptъ, кѹ кꙟt maї mape ва fi nѹmърѹл oamenілор, лѹꙟndѹ-se ачеваш кътime de гpꙟѹ; аша dap челъ-л-алt paпopt ва fi речіпрок; de ачееа se ва ашъza пpoпорціа пpeкѹm ѹрmeazъ:

$$\frac{1260}{250} : \frac{2400}{780} = 3\frac{3}{4} : x \text{ saѹ}$$

$$273 : 125 = 5 . x, \text{ шi}$$

$$x = \frac{625}{273} = 2 \text{ лѹnї шi 8 zіле.}$$

4) 120 лѹкръtopї, лѹкpꙟnd кꙟte 10 чeasѹpї пe zi, sапъ ѹn шанц de 980 stꙟnжꙟnї лѹnг, $\frac{1}{2}$ stꙟnжꙟn лapг шi $2\frac{1}{2}$ nічioape adꙟnк; se чepe кꙟt ва пѹtea fi de лѹnг ѹn шанц de $3\frac{1}{2}$ nічioape лapг, шi de 2 nічioape adꙟnк, пe каpe ꙗл вop sъпа 410 лѹкръtopї ꙟn 30 zіле, лѹкpꙟnd кꙟte 8 чeasѹpї пe zi. Фіnd къ ꙟntpe nѹmepiле date ꙟл pцimiле sꙟnt espimate кѹ

deosebite ȣnimĭ, sъ se префакъ stɪнжiniĭ ɪн пiчоа-
ре, шi sъ se aшeze кътimiлe dȣпъ регȣлa обiчнȣitъ:

120 лȣкр. 20 z. 0 ч. 3 лърц. $2\frac{1}{2}$ adɪнч. 980 лȣнц.

410 — 30 — 8 — $3\frac{1}{2}$ — 2 — x.

Акȣm лȣнцimea x, toate чeлe-л-aлte sокotindȣ-se къ sɪnt notpiвite, вa fi кȣ atɪt maĭ mape, кȣ кɪt maĭ mape вa fi нȣмъpȣл лȣкpъtopiлop, кȣ кɪt maĭ mȣлte ziлe шi кȣ кɪt maĭ mȣлte чeasȣpĭ пe zi вop лȣкpa; npin ȣpmape aчeste tpeĭ panoptȣpĭ sɪnt dpente.

Ɪntp'aчeeaш вpeme ɪnsъ, toate чeлe-л-aлte fiind notpiвite, лȣнцimea x вa fi кȣ atɪt maĭ mikъ, кȣ кɪt maĭ adɪнк шi maĭ лat se вa sъпa шанцȣл; npin ȣpmape aчeste doъ panoptȣpĭ sɪnt ɪntoapse. Aшa dap sъ se aшeze пpопopцia ȣpmъtoape:

$$\frac{120.20.10}{3\,.\,2\frac{1}{2}} : \frac{410.30.8}{3\frac{1}{2}.2} = 980 : x$$

Din кape se гъseшe $x = 4305$ stɪнжɪnĭ.

5) Dakъ, aвɪnd пpоблema пpeчedentъ de eкzemплȣ, se вa ɪntpeвa: кɪte чeasȣpĭ tpeвȣe sъ лȣкpeze пe zi 100 лȣкpъtopĭ, кa sъ sane ȣn шанц de 120 stɪн-жɪnĭ лȣнг, 4 stɪнжɪnĭ лapг шi 2 stɪнжɪnĭ adɪнк? вom aвea:

980 лȣнц. 3 лърц. $2\frac{1}{2}$ adɪнч. 120 лȣкр. 20 z. 10 ч.

220 — 4 — 2 — 100 — 8 — x.

Пpопopцia dap вa fi:

$$\frac{980\,.\,3\,.\,2\frac{1}{2}}{120\,.\,20} : \frac{220.4.2}{100.8.} = 10 : x$$

de ȣnde se гъseшe $x = \frac{350}{49} = 7\frac{9}{49}$ чeasȣpĭ.

6) Пentpȣ a se faчe ȣn zid de 7 stɪнж. лȣнг, ȣn stɪнж. naлt, $2\frac{1}{2}$ пiчioape гpos, tpeвȣesk 5000 къ-

ръmъzĭ, de 1 пічіор лꙋнџĭ, $\frac{1}{2}$ пічіор лate, $\frac{1}{4}$ гроа-se; акꙋm de ар fi sъ se facъ ꙋn zid de 10 stънж. лꙋнг, 5 пічіоape нaлt, 2 пічіоape гроs, кънte къръmizĭ ар тpeбꙋi, fiind къръmida de 11 деџete лꙋнгъ, 7 деџete латъ, ші $\frac{1}{3}$ деџet гроasъ?

Pedꙋкъndꙋ-se toate dimensiйле ла ачеѣаш ꙋnime, saꙋ maĭ simплꙋ, pedꙋкъndꙋ-se нꙋmaĭ кътimiле omолоџе ън amъndoъ казеле ла ачеѣаш ꙋnime (Екzemпл. 2). Bom авеа:

7 st. 6 піч. $2\frac{1}{2}$ піч. 5000 къръm. 12 деџ. 6 деџ. $\frac{1}{4}$ піч.
10 — 5 — 2 — x — 11 — 7 — $\frac{1}{3}$ —.

Фiind къ тpeбꙋesк кꙋ atът maĭ mꙋлte къръmizĭ, кꙋ кът maĭ mape este лꙋнџimea, ълъџimea, ші гроsimea zidꙋлꙋĭ; ші fiind къ кꙋ atът maĭ mꙋлte къръmizĭ тpeбꙋesк, кꙋ кът maĭ miкъ ва fi лꙋнџimea, лъџimea ші гроsimea лор: челе тpeĭ d'ънtъĭ рапортꙋрĭ вор fi dpeпte, іар челе-л-алте тpeĭ ънtoapse.

Aша dap $\frac{7 \cdot 6 \cdot 2\frac{1}{2}}{12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4}} : \frac{10 \cdot 5 \cdot 2\frac{1}{12}}{11 \cdot 7 \cdot \frac{1}{3}} = 5000 : x$

De ꙋnde іasъ $x = 3478\frac{368}{537}$.

§. 357. Компарацiа efeктелор продꙋse de deosebite прічінĭ ън timпꙋрĭ непotрiвite, se поate ънtoкmi дꙋпе кiпꙋл ꙋрmътор. Дакъ прічініле se вор sокоti къ лꙋкреазъ ън timпꙋрĭ deопotрiвъ, efeктеле лор se вор авеа ънtpe еле прекꙋm прічініле; ші дакъ прічініле se вор sокоti deопotрiвъ, efeктеле лор se вор авеа ънtpe еле прекꙋm timпꙋріле; аша dap дꙋпъ §. 356. de обще: e f e к t e л e s ъ n t ъ n р а п о р t ꙋ р ĭ к о m п ꙋ s e d i n р а п о р t ꙋ р ĭ d р е п t е а л е п р і ч і н і л о р ш і а л е t i m п ꙋ р і л о р. Фie C ші c прічініле, T ші t timпꙋріле, E ші e efeктеле, ші вom авеа $E : e = CT : ct$.

Екzemплꙋрї.

1) 20 Seчерътopї tae ꙟn 7 zіле грꙟꙋл dела шase погоane de арътꙋръ; ꙟn кꙟte zіле 36 seчерътopї ар пꙋtea тъиа грꙟꙋл dела 9 погоane?

Ꙟn пропорціа $E:e=CT:ct$ sъ se sokoteaskъ $E=6$, $C=20$, $T=7$, $e=9$, $c=36$ ші ва fi $6:9=140:36t$ saꙋ $6:1=35:t$ ші $t=5\frac{5}{6}$ zіле.

2) Dakъ 100 fл. daꙋ 5 fл. dobꙟndъ пе an, кꙟtъ dobꙟndъ вор da 7860 fл. ꙟn 15 zіле?

Аічї sъ se іа капіталꙋл dpent прічіна лꙋкрътоаре, dobꙟnda dpent efektꙋл, прін ꙋрмаре sъ se пꙋе $E=5$, $C=100$, $T=1$ an $=365$ zіле;
$c=7860$ ші $t=15$, ші вом авеа
$5:e=100\,.\,365:7860\,.\,15$ saꙋ
$1:e=73:1179$, din каре se гъсеще
$e=16\frac{11}{73}$ fл.

Ла asemenea калкꙋле анꙋл se обічнꙋеще а se sokoti нꙋмаї de 360 zіле ші fieш каре лꙋнъ de 30 zіле, de ачееа проблема de maї sꙋs ар da пропорціа ꙋрмътоаре:
$5:e=36000:7860\,.\,15$,
de ꙋnde se гъсеще $e=16\frac{3}{8}$ fл.

§. 358. Sъ zічem къ din прічініле C, $\mathfrak{C}$, c, ꙟn timпiї T, $\mathfrak{T}$, t резꙋлteazъ efektele M, N, P; atꙋнчї вом авеа $M:N=CT:\mathfrak{CT}$; saꙋ fiind къ терміниї ачещії пропорції sꙟnt нꙋмере, se пот мꙋta терміниї de міжлок, $M:CT=N:\mathfrak{CT}$.

Asemenea se гъсеще $M:P=CT:ct$, saꙋ $M:CT=P:ct$. De ачееа ва fi $M:CT=N:\mathfrak{CT}=P:ct=$ шчл., dakъ вор fi maї мꙋлte asemenea efekte.

Din §. 332. ѕрmeazъ a fi: $(M+N+P):(CT+\mathfrak{CT}+ct)=M:CT=N:\mathfrak{CT}=P:ct$. Акѕm de вom лѕa $M+N+P=E$, шi de вom ɫntoapче paцiiле вom aвea: $(CT+\mathfrak{CT}+ct):E=CT:M=\mathfrak{CT}:N=ct:P$. Saѕ sѕma пpodѕкtелop eшite din ɫmmѕлцipea пpiчiпiлop кѕ timпiĭ se ape кътpe efeкtѕл ɫntpeг, пpeкѕm fie кape пpiчiпъ, ɫmmѕлцitъ кѕ timпѕл eĭ, se ape кътpe efeкtѕл eĭ. Пe aчeastъ пpoпopцie este ɫntemeɪatъ pегѕлa soцietъцiĭ.

Екzemплѕpĭ.

1) Tpeĭ negѕцъtopĭ пѕп ɫn toвъpъшie oapeкape sѕmъ пe ѕn an, чел din tɫĭ dete 1000 фл. чел d'ал doiлea 2700 фл. шi чел d'ал tpeiлea 850 фл. Кѕ aчeastъ sѕmъ eĭ къщiгapъ 540 фл. Se чepe пapteа че se кѕвine fie кърѕɪa soц?

Фiind къ timпiĭ ɫntp'aчeastъ пpoвлemъ sɫnt d'opotpiвъ, aчeщea se щepг ɫn пpoпopцia de maĭ sѕs, dakъ antечedenцiĭ se вop ɫmпърцi пpin eĭ (пpin timпĭ). Акѕm sъ пѕпem $E=540$; $C=1000$; $\mathfrak{C}=2700$; $c=850$; пpin ѕpmape вa fi $C+\mathfrak{C}+c=4550$ шi $(C+\mathfrak{C}+c):E=4550:540=455:54$. Dintp'aчeasta вom aвea:

$$455:54=1000:M$$
$$455:54=2700:N$$
$$455:54=850:P$$

Aшa dap къщiгѕл

чeлѕĭ din tɫĭ soц, saѕ $M=118$ фл. $40\frac{80}{91}$ кp.
чeлѕĭ d'ал doiлea . . . $N=320$ фл. $26\frac{34}{91}$ кp.
чeлѕĭ d'ал tpeiлea . . . $P=100$ фл. $52\frac{68}{91}$ кp.

$E=M+N+P=540$ фл.

2) Треї негȣцъtорї аȣ пȣs ла mіжлок оаре каре sȣ-mъ, чел dintîї a dat 530 флор. ꙟн 6 лȣнї, чел d'ал doiлѣ 840 фл. ꙟн 5 лȣнї, шi чел d'ал tpeiлѣ 250 фл. ꙟntp'ȣн an saȣ ꙟн 12 лȣнї; ачещї банї аȣ dat ȣн къщіг de 200 фл.; se чере партѣ de къщіг a fie кърȣia soц?

Sъ пȣnem ꙟаръш $E = 200$.

$$CT = 530 \times 6 = 3180$$
$$\mathfrak{CT} = 840 \times 5 = 4200$$
$$ct = 250 \times 12 = 3000$$

прiн ȣрmаре $(CT + \mathfrak{CT} + ct) = 10380$

Шi $(CT + \mathfrak{CT} + ct) : E = 10380 : 200 = 519 : 10.$

Аша dap вом авѣ ȣрmътоареле пропорцiї

$$519 : 10 = 3180\ M$$
$$519 : 10 = 4200\ N$$
$$519 : 10 = 3000\ P$$

Шi dintp'ачестѣ se гъсеще къщігȣл

челȣї din tîї soц saȣ $M = 61$ фл. $16\frac{62}{173}$ кр.

челȣї d'ал doiлѣ . . . $N = 80$ фл. $55\frac{86}{173}$ кр.

челȣї d'ал tpeiлѣ . . . $P = 57$ фл. $48\frac{36}{173}$ кр.

$E = M + N + P = 200$ фл.

Пентрȣ логарitmi.

§. 359. Sъ лȣъm dȣпъ воiнцъ пȣmърȣл a maї mape dekît ȣnimѣ, шi sъ ne ꙟкiпȣim къ пентрȣ ȣн пȣmър оаре каре N пȣtem гъsi алt пȣmър n ка sъ fie $N = a^n$. Esпоnentȣл n каре ꙟmплiнеще ачѣstъ kondiцie se пȣmеще логарitmȣ ал пȣmърȣлȣї N шi a база лȣї. Тоцї логарitmii, каре аȣ ачѣаш базъ, алкътѹеskѹ̆ sistema логаpitmікъ. Adікъ ꙟn sistema ачееа a къріа базъ este $= 10$, nѹmepiле 2, 3, 4, шчл. вор fi логаpitmi nѹmepiлор $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; $10000 = 10^4$ шчл.

§. 360. Логаpitmѹл ѹnѹї nѹmъp se ꙟnsemnеазъ npin siлаба *log.* че se nѹne ꙟnaintea ачестѹї nѹmъp. Аша dap ꙟn екzemnлѹл de maї sѹs ва fi $log. 100 = 2$; $log. 1000 = 3$; шчл. De обще $log. N = n$, dакъ ва fi $N = a^n$.

§. 361. Фie $M = a^m$ шi $N = a^n$, npin ѹpmape $m = log. M$ шi $n = log. N$. Акѹm fiind къ este $M.N = a^m . a^n = a^{m+n}$ (§. 206, §. 263. V), ва fi шi $log. MN = m + n$; шi de se вор nѹne ꙟn локѹл лѹї m шi n npeцѹpiле лор, вom авеа $log. MN = log. M + log. N$. Asemenea se noate dовеdi къ este $log. MNP = log. M + log. N + log. P$. Аша dap логаpitmѹл npodѹкtѹлѹї este d'onotpiвъ кѹ sѹma логаpitmiлор fъкъtopiлор.

Dакъ dap ꙟn вpe o sistemъ opї каpe, вор fi кѹnoskѹцї логаpitmi nѹmepiлор ꙟntrіtoape dintp'ачеstea se not гъsi npin adъогаpe логаpitmi nѹmepiлор комnѹse.

S. n. $log. 6 = log. 2 + log. 3$, nentpѹ къ $6 = 2 \times 3$.

$log. 105 = log. 3 + log. 5 + log. 7$, nentpѹ къ $105 = 3 \times 5 \times 7$.

Asemenea шi ꙟn esnpesiї алџебрічещї ва fi:

$$log. 3. ab(a + b) = log. 3 + log. a + log. b + log.(a + b)$$

$$log.(a^2 - x^2) = log.(a + x) + log.(a - x).$$

§. 362. Фie $\frac{M}{N} = Q$, npin ѹpmape $M = NQ$.

Dѹnъ §. 361. ва fi $log. M = log. N + log. Q$; шi dакъ din amîndoъ пърціле ачещії екуацiї se ва sкъdеа $log. N$ вom авеа:

$$log. M - log. N = log. Q;\ \text{saŭ}\ log. \frac{M}{N} = log. M - log. N$$

Аша dар логарitmул кътулуї este deопоtрiвъ ку логарitmул de-ммулцitулуї, maї пуцin логарitmул мпърцiторулуї; saŭ ћаръш логарitmул унеї фрънцерї se ва гъsi, dакъ din логарitmул нумъръторулуї se ва sкъdеа логарitmул нumitорулуї. Sпре пildъ.

$$log. \frac{2a}{3b} = log. 2a - log. 3b = log. 2 + log. a - log. 3 - log. b.$$

$$log. \left(\frac{3ab}{a-b}\right) = log. 3ab - log. (a-b) = log. 3 + log. a + log. b - log. (a-b).$$

§. 363. Фiе ћаръш $N = a^n$, шi аша $n = log. N$. Фiind къ нsъ $N^m = (a^n)^m = a^{mn}$ (§. 211 шi 263.) ва fi шi $log. N^m = mn$; шi dакъ н локул луї n se ва пуне прецул луї вom авеа $log. N^m = m.\ log. N$. Adiкъ логарitmул унеї пуterї este d'опоtрiвъ ку логарitmул ръdъчiнi мmулцit ку esпоnentул пуtерi, S. п. $log. 4 = 2\ log. 2$, пеntру къ $4 = 2^2$; saŭ $log. 27 = 3.\ log. 3$, пеntру къ $27 = 3^3$; $log. 2187 = 7\ log. 3$, пеntру къ $2187 = 3^7$.

$$log. 4a^2b^3c^m = log. 4 + log. a^2 + log. b^3 + log. c^m$$
$$= 2\ log. 2 + 2\ log. a + 3\ log. b + m\ log. c.$$

$$log. \frac{5a^n\ (a^2 - x^2)}{3b^3\ (c-x)^4} = log. 5a^n (a^2 - x^2)^2 - log. 3b^3\ (c+x)^4 =$$
$$log. 5 + n\ log. a + 2\ log. (a+x) + 2\ log. (a-x) - log. 3 - 3\ log. b - 4\ log. (c-x).$$

§. 364. Съ zічem къ $R=\sqrt[m]{N}$; пріn ѕрmаре $N=R^m$. Dѕпъ §. 363 ва fi $log. N=m\, log. R$, ші de se ва ꙟmпърці ачеаstъ екѕаціе пріn m вom авеа $\frac{log. N}{m}=log. R$; saѵ $log. \sqrt[m]{N}=\frac{log\ N}{m}$. Adікъ: Логаріtmѕл ръdъчіni че треbѕе sъ se sкоацъ dintр'ѕn пѕmър орї каре, se поаtе гъsi, dакъ se ва ꙟmпърці логаріtmѕл ачеstѕї пѕmър пріn esпonentѕл ръdъчіni. S. п.

$$log. \sqrt{2}=\tfrac{1}{2}\, log. 2,\ log. \sqrt[3]{3}=\tfrac{1}{3}\, log. 3.$$

$$log. \sqrt[5]{\tfrac{3}{7}}=\tfrac{1}{5}\, log. \tfrac{3}{7}=\tfrac{1}{5}\,(log. 3-log. 7)$$

$$log. \sqrt[3]{\frac{5a^2b^m}{3c^nd}}=\tfrac{1}{3}\,(log.\ 5a^2b^m-log.\ 3c^nd)$$

$$=\tfrac{1}{3}\,(log. 5+2\, log. a+m\, log. b-log. 3$$

$$-n\, log. c-log. d)$$

$$log. 2a^3\sqrt[n]{(a-x)^2}=log. 2+3\, log. a+\frac{n}{2}log.(a-x)$$

§. 365. Орї каре ва fi пpeцѕл лѕі a вom авеа tot deaѕna $a^0=1$ (§. 268.), de ачеа $log. 1=0$. Аша dар ꙟn орї каре sistemъ логаріtmѕл ѕnimi este d'опоtрівъ кѕ пѕла.

§. 336. Фііnd къ este $a=a^1$, ва fi ші $log. a=1$; saѵ ꙟn орї каре sistemъ логаріtmѕл базеї este d'опоtрівъ кѕ ѕnimеа.

§. 367. Ꙟn §. 359 s'а fъкѕt sѕпozіціе къ este $a>1$, adікъ dакъ n ва fi ѕn пѕmър pozitiв, аtѕnчї пѕtереа a^n ва fi кѕ аtът maї mаре, кѕ кът ва креще esпonentѕл n; аша dар ла ѕп пѕmър maї mаре N коресnѕnde ꙟкъ ші ѕn логаріtmѕ maї mаре n. Dakъ n ва fi negatiв, пътерєа $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ ва fi maĭ mikъ dekѫt ѹnimєa, saѹ N ва fi o frѫnџере ade'ъ-patъ, каре se mikшореazъ кѹ atѫt maĭ mѹлt, кѹ кѫt maĭ mape se ва лѹa esпonentѹл n. Aшa dap лoгapitmi frѫnџepiлop adъвъpate sѫnt пѹmepe negatiве, каре вop fi кѹ atѫt maĭ mape кѹ кѫt maĭ mikъ ва fi frѫnџерєa кърia eлe кopesпѹnd.

§. 368. Фie a шi b вaзeлe a doъ sisteme deosebite, шi sъ zичem къ $N=a^n$ ѫn sistema чєa d'ѫntѫĭ, ȣap ѫn чєa de a doiлєa $N=b^r$, (ѹnde n шi r тpeбѹe sъ fie пѹmepe deosebite, afapъ de o ѫnтѫmплape пѹmaĭ кѫnd ва fi $N=1$ §. 365.) Акѹm dakъ, ка sъ se deosiбєaskъ sistemeлe, вom ѫnsemna лoгapitmi чeлĭĭ d'ѫntѫĭ пpin $Log.$ шi aĭ чeлĭĭ de a doiлєa пpin $log.$ ва fi $n=Log.N$ шi $r=log.N$. Dap fiind къ este ȣapъш

$b^r=a^n$ saѹ $b=a^{\frac{n}{r}}$, ва fi шi $Log.b=\frac{n}{r}=\frac{Log.\ N}{log.\ N}$.

Asemenєa, de se ва лѹa $M=a^m$ шi $M=b^s$, ва fi $m=Log.M$, $s=log.M$, шi пentpѹ къ este $b^s=a^m$, saѹ

$b=a^{\frac{m}{s}}$, ва fi шi $Log.b=\frac{m}{s}=\frac{Log.M}{log.M}$; de aчєa

$\frac{Log.M}{log.M}=\frac{Log.N}{log.N}$ saѹ $log.M:Log.M=log.N:Log.N$.

Aшa dap лoгapitmi aчeлopaш пѹmepe ѫn deosebite sisteme aѹ aчeлaш panopтѹ ѫntpe eĭ. Пpin ѹpmape de ва fi кѹnoskѹt aчest panopтѹ, шi лoгapitmi ѹneĭ sisteme, dintp'aчesteasе пot гъsi лoгapitmi чeлĭĭ-л-aлte sisteme. Dap кѫtѹл aчestѹĭ panopt s'a гъsit maĭ sѹs, adikъ $\frac{Log.N}{log.N}=Log.b$; de ѹnde ȣрmeazъ $log.\,N = \frac{Log.\,N}{Log.\,b}$. Аша dap de ва fi къноskȣтъ sistema а къріа базъ este a, шi de se ва чере логарітmȣл нȣmъpȣлȣї N че kopespȣnde ла baza b, атȣнчї ва тpeбȣi sъ se ↑mпapцъ логарітmȣл ачestȣї нȣmъp че kopespȣnde ла baza a прin asemenea логарітmȣ de baza b.

§. 369. Sistema логарітmілор обічнȣiцї аȣ нȣmъpȣл 10 dpent базъ. Прin ȣpmape логарітmȣл обічнȣit ал оаре кърȣiа нȣmъp este esпonentȣл пȣтеpi de 10, kape este d'опotpiвъ кȣ ачest нȣmъp. ↑ntp' ачеastъ sistemъ нȣmaї нȣmepiле 10, 100, 1000 шчл. аȣ de логарітmї нȣmepe ↑ntpeцї. Логарітmi тȣтȣлор челор-л-алте нȣmepe вор fi fpънцepї, kape se обічнȣesk a se аръta прin fpънцepї zeчimале. Adikъ логарітmi нȣmepілор ↑ntpe 1 шi 10 вор fi >0 dap <1. Логарітmi нȣmepілор ↑ntpe 10 шi 100 вор fi >1 dap <2. Шi de обще логарітmi нȣmepілор ↑ntpe 10^m шi 10^{m+1} вор fi $>m$ dap $<m+1$; de ачea вор fi komпȣшї dintp'ȣn нȣmъp ↑ntpeг m, kape se нȣmeще карактepistikъ, шi din fpънцepiле zeчimале kape se нȣmeskȣ Mantisъ. Фiind къ нȣmepiле ↑ntpe 10^m шi 10^{m+1} se afлъ komпȣse din $m+1$ цifpe, карактepistika логарітmȣлȣї обічнȣit ва fi tot d'аȣna maї mikъ кȣ о ȣnime dekът нȣmъpȣл цifpелор din kape нȣmъpȣл se afлъ komпȣs шi ла kape пpiвeще ачest логарітmȣ.

§. 370. Dakъ P ва fi de mіжлок цеometpik ↑ntpe M шi N, логарітmȣл лȣї P ва fi de mіжлок аpitmetik ↑ntpe логарітmi лȣї M шi лȣї N, пentpȣ къ de se ва авеа $M:P=P:N$ ва fi $P^2=MN$ шi $P=\sqrt{MN}$;

de ачева $log.P=\frac{log.M+log.N}{2}$ (§. 364. 361. 308). Акȣm de вом воі съ хотърꙟm логаріtmȣл оаре кърȣіа нȣмър, ѕпре пілdъ ал нȣмърȣлȣї 5, съ se на челе доъ маї de апроапе нȣмере ꙟntpe каре каde нȣмърȣл 5, шї аї кърора логаріtmї сꙟnt кȣноскȣцї, прекȣm ла ачеаstъ ꙟntꙟmпларе нȣмеріле 1 шї 10, шї съ se каȣtе нȣмърȣл каре ва fi ꙟn пропорціе de міжлок џеометрікъ ꙟntpe ачеsте нȣмере.

1) Фіе dap $1:p=p:10$ шї пріn ȣрмаре $p=\sqrt{10}=3{,}162277$ шї $log:p=\frac{log.1+log.10}{2}=\frac{0+1}{2}=0{,}5$.

2) Фіінd къ нȣмърȣл 5 каde ꙟntpe p шї 10, съ se каȣtе акȣm ꙟntpe ачесте доъ нȣмере чел de міжлок џеометрік q шї вом авеа $q=\sqrt{10p}=\sqrt{31{,}622777}=5{,}623412$ шї $log.q=\frac{log.p+log.10}{2}=\frac{1{,}5}{2}=0{,}75$.

3) Акȣm fiind къ 5 каde ꙟntpe p шї q, съ se каȣtе медіȣл џеометрік r ꙟntpe ачесте нȣмере, шї ва fi $r=\sqrt{pq}=\sqrt{17{,}782789}=4{,}216964\ldots$ шї $log.r=\frac{log.p+log.q}{2}=0{,}625$.

4) De se ва ȣрма калкȣлȣ ꙟntp'ачеst кіп, ва fi $s=\sqrt{qr}=\sqrt{23{,}713730}=4{,}869674\ldots$ шї $log.s=\frac{log.q+log.r}{2}=0{,}6875$.

5) $t=\sqrt{qs}=\sqrt{27{,}384183}=5{,}232990\ldots$ шї $log.t=\frac{log.q+log.s}{2}=0{,}71875$.

XXVIII.

6) $u = \sqrt{st} = \sqrt{25,482955} = 5,048064 \ldots$ ші

$$log\ u = \frac{log.s + log.t}{2} = 0,703125.$$

De se ва ѹрма калкѹлѹл tot аша se ва afла ꙟn чѣа maĭ dѹпъ ѹрmъ mediѹл џеоmetрiк $= 5,0000000$ а къріа ашапѣа џifръ zечimалъ ва fi d'опоtрiвъ кѹ пѹла, ачел пѹmър se ва лѹа dрепt 5 ші логаріtmѹл лѹĭ dрепt логаріtmѹл пѹmърѹлѹĭ 5.

Пе ачest dрѹm аѹ ѹрmat чеĭ d'ꙟntꙟĭ каріĭ аѹ iskodit регѹла логаріtmілор, Непер ші Брігіе аѹ авѹt mѹлtъ ostenѣалъ пꙟnъ аѹ гъsit кѹ ачest кіп логаріtmіĭ ші 'наѹ ашъzat ꙟn tаблe. Matematiчiĭ чеĭ maĭ noĭ аѹ afлat алtе metoade, пріп каре se пot хоtърꙟ логаріtmi mѹлt maĭ лesne. Esплікаціа ачestор metoade se ва ведѣа ꙟn matematiка sѹблimъ. Пеntрѹ ачеste metoade ші пеntрѹ ꙟntребѹінцарѣа таблелор de логаріtmĭ se вор konsѹлtа ꙟntрodѹчеріле че se обічпѹеskѹ а se пѹпе ла ꙟпчепѹtѹл ачestор табле.

§. 371. De se ва faче sѹпоzіціе, къ логаріtmi обічпѹіціĭ аĭ пѹmеріл̃ор ꙟntреџĭ sꙟnt кѹnoskѹџĭ din tабле, логаріtmi fрꙟпџеріл̃ор se гъseskѹ ꙟntр'ачest kіп, аdікъ:

De se ва чере логаріtmѹл fрꙟпџері zечimалъ, s. п. ал fрꙟпџері 0,6583, требѹе съ пе аdѹчеm аminte къ ачѣаstа ꙟntорkꙟndѹ-se ꙟn fрꙟпџере обічпѹітъ este $= \frac{6582}{10000}$;

de ачеѣа $log.\ 0,6583 = log.\ 6583 - log.\ 10000$ (§. 322.); dар $log.\ 6583 = 3,8184239$ ші $log.\ 10000 = 4$; пріп ѹрmаре $log.\ 0,6583 = 3,8184239 - 4$. Фiind къ ꙟпsъ ꙟntр'ачѣаstъ diferенцъ џifра ꙟntрѣагъ 3, ші іаръш altea ꙋnimĭ ꙟn цifpa че tpeбꙋe sъ se skazъ 4 se щергꙟ вom авea:

$$log.\ 0,6583 = 0,8184239 - 1.$$

Dꙋпъ ачeasta fiind къ ꙗръш este $0,06583 = \frac{6583}{10^5}$ вom авea $log.\, 0,06583 = log.\, 6583 - log.\, 10^5 = 3,8184239 - 5$, saꙋ $log.\, 0,06583 = 0,8184239 - 2$. Asemenea se гъseщe $log.\ 0,00658 = 0,8184239 - 3$.

Ꙟntp'ачeщĭ логаpitmĭ нꙋmepiлe skъzꙋte sꙟnt d'ón-potpiвъ кꙋ нꙋmъpꙋл локꙋлꙋĭ челiĭ d'ꙟntꙟĭ цifpe ꙟn-sъmnъtoape a fpꙟнцepiлop zeчimaлe, ла кape se adꙋк ачeщĭ логаpitmĭ. De ꙋnde ese ꙋpmъtoapea pегꙋлъ пentpꙋ логаpitmi fpꙟнцepiлop zeчimaлe. „Sъ se ia fpꙟнцepea ка ꙋn нꙋmъp ꙟntpeг шi sъ se кaꙋte ꙟn taблъ mantisa кape кopesпꙋnde ла ачest нꙋmъp; d'a dpeapta ачeщia пen-tpꙋ каpaктepistiкъ sъ se skpie кꙋ sem-нꙋл skъdepiĭ нꙋmъpꙋл локꙋлꙋĭ челiĭ d'ꙟntꙟĭ цifpe ꙟnsъmnъtoape a fpꙟнцepi zeчimaлe пpoпꙋse. Adeкъ fiind къ 0,9227255 este mantisa логаpitmꙋлꙋĭ нꙋmъpꙋлꙋĭ 837, ва fi *log.* $0000837 = 0,9227255 - 5$; пentpꙋ къ ꙟntp'ачeastъ fpꙟn-цepe zeчimaлъ цifpa d'ꙟntꙟĭ este ла ал чinчeлea лок.

§. 372. Din пpotiвъ de se вa чepe нꙋmъpꙋл кape кopesпꙋnde ла логаpitmꙋл $0,8042962 - 3$, sъ se кaꙋ-te ꙟn taблъ нꙋmъpꙋл кopesпꙋnzъtop ла mantisa 0,8042962; кape вa fi: 63723. Фiind къ ꙟnsъ кa-paктepistiкa логаpitmꙋлꙋĭ пpoпꙋs este —3, нꙋmъpꙋл че кopesпꙋnde ла ачest логаpitmꙋ вa fi o fpꙟнцepe zeчimaлъ, шi цifpa eĭ чea d'ꙟntꙟĭ, adeкъ 6 se вa afлa ла локꙋл ал tpeiлea,

de ачea $0,8042962 - 3 = log.\ 0,006372З.$

§. 373. Фiind къ este $3,572 = \frac{3572}{1000}$, ва fi ші $log. 3,572 = log. 3572 - log. 1000$.
Dар $log. 3572 = 3,5529115 = 3,m$ dакъ пentpѹ пpeskѹptape se ва лѹа лitepa m dpent mantisъ.

De ачеѣа ва fi $log. 3,572 = 3,m - 3 = 0,m$.
Asemenѣа ва fi $log. 35,72 = 3,m - 2 = 1,m$.
$log. 357,2 = 3,m - 1 = 2,m$.

Aшa dap каpaкtepistiка лoгapitmѹлѹї вpe ѹнѹї пѹmъp ꙟntpeг, каpe este ꙟnsoцit кѹ вpe o fpꙟnцepe zeчimaлъ; se aflъ din пѹmъpѹл цifpeлop пѹmъpѹлѹї ꙟntpeг, лenъdꙟndѹse цifpeлe fpꙟnцepi zeчimaлe; ші este кѹ o ѹnime maї miкъ dекꙟt пѹmъpѹл ачелop цifpe.

§. 374. Din пpotiвъ dакъ ва tpeбѹi a se хotъpꙟ пѹmъpѹл че кopespѹnde лa лoгapitmѹл 2,6110964, se ва гъsi ꙟn taбле къ пѹmъpѹл 40841 кopespѹnde лa mantisa 0,6110964. Dар fiind къ каpaкtepistiка лoгapitmѹлѹї este 2, dintp'aчeste цifpe aflate se вop тъѧа tpeї пentpѹ ꙟntpeцi чeлe maї dѣа stꙟnгa; ші aшa пѹmъpѹл чepѹt ва fi = 408,41 ...

§. 375. Чeлe че s'aѹ zis лa §. 373. se пot dobedi ші ꙟntp'aчest кiп:

De se ва ꙟmпъpцi oape каpe пѹmъp N пpin 10, din лoгapitmѹл ачeлѹї пѹmъp ва tpeбѹi съ se sказъ ѹnimѣа, ка съ ѧасъ лoгapitmѹл кꙟtѹлѹї, пentpѹ къ:

$$log. \frac{N}{10} = log. N - log. 10 = log. N - 1.$$

Фiind къ ꙟnsъ este $log. 3623 = 3,5590683$; saѹ пentpѹ пpeskѹptape skpiindѹse лitepa m dpent mantisъ,

$$
\begin{array}{lll}
log.\ 3623 & = 3,m. & \\
\hline
log.\ 362,3 & = 3,m-1 & = 2,m. \\
log.\ 36,23 & = 3,m-2 & = 1,m. \\
log.\ 3,623 & = 3,m-3 & = 0,m. \\
log.\ 0,3623 & = 0,m-1. & \\
log.\ 0,03623 & = 0,m-2. & \\
log.\ 0,003623 & = 0,m-3. &
\end{array}
$$

шi аша maĭ ꙟнколо.

Аша dap логаpitmiĭ обічнȣіці aĭ нȣмеріԉор dекаdiче dintp'ачеѣаш sepie a ціfpелор konstante, aȣ̆ ачеѣаш mantisъ, dap каpактepistiка este deosебitъ. Акȣm de se вор ꙟnsemna локȣpiле ціfpелор ꙟn sistema dекаdiкъ пpin нȣмepe, шi ꙟnsъ локȣpiле ціfpелор ꙟntpeцĭ пpin нȣмepe пozitiве, ꙗp локȣpiле ціfpелор zeчimaле пpin нȣмepe negatiве, atȣнчĭ каpактepistiка логаpitmȣлȣĭ обічнȣit ал fieшкъpȣꙗ нȣmъp se пotpiвеще кȣ аpътъtopȣл ціfpeĭ челiĭ maĭ dѣa stꙟнгa ал ачелȣꙗш нȣmъp, пpeкȣm se аpътъ ꙟn eкsemплеле пpeчedente.

шчл.	3	2	1	0	—1	—2	—3	шчл.
шчл.	miiле.	sȣtimiле.	zeчimiле.	ȣnimiле.	a zeчѣa napte.	a sȣta napte.	a mia napte.	шчл.

Ȣniĭ ка sъ fакъ sъ лipsѣasкъ каpактepistiчiле negatiве adaогъ zeче ȣnimĭ ла логаpitmi de ачest fел; adiкъ ꙟn локȣл логаpitmȣлȣĭ 0,5590683 — 4 пȣн логаpitmȣл 6,559063, къpia adъогъpĭ ꙟnsъ tpeбȣe sъ i se fакъ kompenzaціa ла sfꙟpшitȣл калкȣлȣлȣĭ пpin оаре каре міжлок deoseвit. Dap maĭ вine este съ ɪntpeвȣinцeze чineва, шi maĭ алеs ачеĭ че нȣ sɪnt ɪndestȣл depriншĭ кȣ калкȣлȣл, карактеpisticiле негатiве.

§. 376. De se ва чере логаpitmȣл ȣнеĭ fpɪнцepĭ обічнȣite, doъ ɪntɪmпларĭ пot fi, adiкъ нȣmъpъtopȣл ва fi opĭ maĭ mape saȣ maĭ mik dekɪt нȣmitopȣл.

Ла чеа d'ɪntɪĭ ɪntɪmпларе логаpitmȣл нȣmъpъtopȣлȣĭ ва fi ꙗръш maĭ mape dekɪt логаpitmȣл нȣmitopȣлȣĭ; аша dap чел dȣпъ ȣpmъ se поate skъdea din чел dintɪĭ, ръmъшiцa ва fi логаpitmȣл fpɪнцepi saȣ a кɪtȣлȣĭ. S. п.

$$log. \frac{3978}{1239} = log.\ 3978 - log.\ 1239.$$

$$log.\ 3978 = 3,5996648$$
$$log.\ 1239 = 3,0930713$$
$$log. \frac{8978}{1239} = 0,5065935$$

Ла логаpitmȣл ачеsta копеsпȣnde нȣmъpȣл 3,2106 ... de ачееа $\frac{3978}{1239} = 3,2106$ ....

Алt екzemплȣ. Se чере логаpitmȣл fpɪнцepiĭ $x = \frac{5,37}{0,083}$;

$$log.\ 5,37 = 0,7299743$$
$$log.\ 0,083 = 0,9190781 - 2$$
$$- \qquad +$$
$$log.\ x = 1,8108962$$

Ла логаpitmȣл ачеstȣꙗ копеsпȣnde нȣmъpȣл $x = 64,698$.

Ал tpeiлеа екzemплȣ. Съ se каȣte прецȣл лȣĭ $x = \frac{0,378}{0,0095}$

$$log.\ 0,378 = 0,5774918 - 1$$
$$log.\ 0,0095 = 0,9777236 - 3$$
$$- \qquad +$$
$$log.\ x = 1,5997682$$

Ла ачest логаріtmi коръsпȣnde нȣмърȣл $x = 39{,}789$.

Ꙟn екzemплȣріле челе doъ dȣпъ ȣрmъ, semnеле логаріtmȣлȣї че требȣе sъ se sкаzъ, dȣпъ регȣла џенералъ а skъdepi, sꙟnt skimбate.

§. 377. Ла ꙟntꙟmпларea adoъа, кꙟnd нȣmitорȣл ва fi maї mape декꙟt нȣмъръtорȣл, atȣnчї ші логаріtmȣл челȣї d'ꙟntꙟї ва fi maї mape декꙟt ал челȣїлалt, de ачеа нȣ se поаte skъdea dintp'ачesta.

S. п. $\log. \frac{1}{3} = log. 1 - log. 3$. Dap fiind къ este $log. 1 = 0$, ва fi $log. \frac{1}{3} = - log. 3 = - 0{,}4771213$. Dȣпъ ачеasta fiind къ este $\frac{5}{9} = \frac{1}{9} \times 5 = \frac{1}{9:5}$, ва fi ші $log. \frac{5}{9} = log. 1 - log.(9:5) = - log.(9:5)$. Dap $log.(9:5) = log. 9 - log. 5$, de ачеа: $log. \frac{5}{9} = -(log. 9 - log. 5)$.

Аша dap ла ачеasтъ ꙟntꙟmпларе, din логаріtmȣл нȣmitорȣлȣї se skade логаріtmȣл нȣмъръtорȣлȣї, ші diфepenца кȣ semnȣл нeгаtiв, ва fi логаріtmȣл fpꙟnцepi. Adiкъ ꙟn екzemплȣ:

$log. 9 = 0{,}9542425.$

$log. 5 = 0{,}6980700.$

diфepenца $= 0{,}2552725$;

de ачеа $log. \frac{5}{9} = -0{,}2552725$.

Фiind къ ꙟnsъ логаріtmi negatiвї aї fpꙟnцеpілор adeвъpate, sꙟnt maї пȣцin ꙟnлеsnitopї ла калкȣлаціе, ꙟn локȣл лор se обічнȣеще а se ꙟntребȣinца логаріtmi кȣ карактеpistiче negatiвe.

§. 378. Adiкъ fiind къ este $\frac{M}{N} = \frac{10^n M}{10^n N}$, ва fi ші $log.\frac{M}{N}=log.10^n M - log.10^n N = log.10^n + log.M - log.10^n - log.N.$

Saȣ $log.\frac{M}{N}=n+log.M-log.N-n.$

De ачеа daка ва fi $log.M<log.N$, se вор adъога ла каракteрistiка логарitmȣлȣĭ M atâtea ȣnimĭ кâte требȣеskȣ ка sъ se поатъ skъdea $log.N$ ші d'a dреапта diferенци sъ se ѫnsemneze нȣмърȣл ȣnimiлор че se вор adъога кȣ semnȣл skъderi. Ѫntр'ачest кiп вом авеа логарitmȣл fрѫнцерi $\frac{M}{N}=\frac{10^n M:N}{10^n}$ ѫn fрѫнцере zeчimaлъ ѫntoaрsъ (§. 184).

Ші аша ва fi ѫn екzемплȣл чел d'ѫntâĭ §. 377.

$log.\frac{1}{3}=1-0,4771213-1=0,5228687-1.$ кърȣia логарitm кореsпȣnde нȣмърȣл 0,33333 . . . .

Ѫn челъ-л-алt екzемплȣ ва fi:

$$1+log.5=1,6989700$$
$$log.9=\underline{0,9542425}$$

de ачеа $log.\frac{5}{9}=0,7447275-1$

Ші аша $\frac{5}{9}=0,5555\ldots\ldots$

Даkъ se ва къȣta $log.\frac{5}{629}$, se ва гъsi:

$$3+log.5=3,6989700$$
$$log.629=\underline{2,7986506}$$
$$log.\frac{5}{629}=0,9003194-3$$

ші $\frac{5}{629}=0,007949\ldots\ldots$

De se ва чере $log.\frac{0,0736}{0,8237}$; se ва гъsi

$$log.0,0736=0,8668778-2$$
$$log.0,9237=0,9655309-1.$$
$$\underline{\quad - \qquad\qquad + \quad}$$

аша dар $log.\frac{0,0736}{0,8237}=0,9013469-2.$

кърȣна коресnȣnde нȣтърȣл 0,079679 . . . .

§. 379. **Комплемент dekadik** ал ȣнȣĭ логарitm орĭ каре se нȣмеще ръмъшiца че ѣасъ dȣпъ че se skade логарitmȣл ачела din нȣтърȣл 10. Комплементȣл dekadik ал fieшкърȣна логарitm se формѣазъ кѫnd se skade цifра ачелȣĭ логарitm din нȣтърȣл 9, deosebit de цifра чѣа маĭ despre dрѣапта каре требȣе съ se skazъ din нȣтърȣл 10. Dȣпъ ачѣastъ регȣлъ, ѫn локȣл логарitmȣлȣĭ, se ѣа din табле кȣ ачеѣаш ѫnлеsnipe комплементȣл seȣ.

S. п. fiind къ este $log. 327 = 2{,}5145478$,
комплементȣл лȣĭ ва fi $= 7{,}4854522$.

Акȣм fiind къ este $log.\frac{M}{N} = log. M - log. N$.

шi компл. dekad. $log. N = 10 - log. N$,
saȣ dinпротivъ $log. N = 10 -$ компл. dek. $log. N$,
ва fi шi, de ѕе ва пȣне ачest прецȣ ѫn локȣл $log. N$,

$$log.\frac{M}{N} = log. M - (10 - \text{компл. dek. } log. N) \text{ saȣ}$$

$$log.\frac{M}{N} = log. M + \text{компл. dek. } log. N. - 10.$$

Аша dар se гъseще шi логарitmȣл кѫtȣлȣĭ saȣ ал frѫнцерi, de se ва adъога ла логарitmȣл нȣтърътoрȣлȣĭ комплементȣл dekadik ал логарitmȣлȣĭ нȣмiторȣлȣĭ, шi de se вор лепъdа din sȣма лор 10 ȣнiмĭ.

Ѫn екzемплȣл I. §. 376. ва fi:

$$\begin{aligned} log.\ 3978 &= 3{,}5996648 \\ \text{компл. dek. } log.\ 1239 &= \underline{6{,}0069287} \\ \text{шi лепъdѫndȣse 10 ȣнiмĭ sȣма ва fi} &= 0{,}5065935 \end{aligned}$$

ачелаш логарitm каре s'а гъsit шi dѫнколо.

XXIX.

§. 380. Dакъ логаріtmȣл ва авеа карактеristika негatівъ, ачеаsta пріn skъдереа логаріtmȣлȣї din нȣmърȣл 10 se ва face позітівъ, de ачееа комплементȣл требȣе sъ se adaoџe. Adікъ ꙟn екzемплȣл ал doїлеа (§. 376) se afлъ:

$$log.\ 0,083 = 0,9190781 - 2.$$

dакъ ачеst логаріtm se ва skъdea din нȣmърȣл 10 іa fi пріn skіmбареа semнелор ла skъдере:

компл. dек. *log.* 0,083 = 10 − 0,9190781 + 2 = 11,0809219. Dар fіind къ dȣпъ че se ва adъога комплементȣл требȣе sъ se skазъ 10 ȣнімї, sъ se лепеde акȣm ачеstеа, пеntрȣ къ se поаte, ші sъ se пȣе пеntрȣ прескȣрtаре:

компл. dек. *log.* 0,083 = 1,0809219.
Dакъ ачеstȣна se ва adъога *log.* 5,37 = 0,7299743.
ва еші 1,8108962.

ачелаш логаріtm, каре s'а гъsit ші ла §. 375.

Ꙟn екzемплȣл ал 3-леа ал ачелȣіаш параграф а fost:

$$log.\ 0,0095 = 0,9777236 - 3;$$

de ачееа компл. dек. *log.* 0,0095 = 2,0222764.

Dакъ ачеstȣна se ва adъога 0,5774918 − 1
ва еші 1,5997682.

логаріtmȣл кърȣна s'а гъsit аколо.

Ꙟntребȣінцареа комплементȣрілор dекаdіче se face de преференцъ, кѫnd ꙟмпърціtорȣл este компȣs de маї мȣлцї fъкtорї, ші ла ачеаstъ ꙟntѫмпларе комплементȣріле ачеstор fъкtорї se поt adъога ла логаріtmȣл dівіdendȣлȣї, de ачееа tot калкȣлȣл логаріtmік se поаte sъвѫрші пріntр'о sіngȣръ adȣнаре.

§. 381. De se ва чере логаріtmȣл вре ȣнȣї нȣмър компȣs, s. п. ал нȣмърȣлȣї $7\frac{13}{19}$, sъ se префакъ ачеst нȣмър ꙟn fрѫнџере sімплъ $\frac{146}{19}$, ші sъ ва гъsi логаріtmꙋл ачещії fрꙟнцері дꙋпъ §. 376. Аша ва fi ші $log. (5 + \frac{2}{3} - \frac{7}{6}) = log. \frac{64}{15}$.

§. 382. Din челе че s'аꙋ zis пꙟнъ аічї s'а въzꙋt кꙋm se гъsesк логаріtmії fрꙟнцерілор saꙋ аї кꙟtꙋрілор; акꙋm рътꙟне а se аръta кꙋm din логаріtmії нꙋмерелор se пot гъsi ші логаріtmії пꙋtерілор ші аї ръдъчінілор лор.

1) Кꙟнд пꙋmъфꙋл ва fi maї mаре декꙟt ꙋnimea. Ла ачеаstъ ꙟntꙟmпларе логаріtmꙋл ачеstꙋї пꙋmър ва авеа каракtеріstiка орї = о saꙋ пoziтівъ. Sъ se гъseaskъ s. п. $log. 7^5$. Фiind къ este $log. 7^5 = 5\ log. 7$ (§. 363.) ші $log. 7 = 0,8450980$, sъ se ꙟmmꙋлцеаskъ ачеst пꙋmър кꙋ 5, ші ва fi $log. 7^5 = 4,2254900$, кърꙋіа логаріtm коресnꙋnde пꙋmъфꙋл 16807.

§. 383. Dакъ se ва чере логаріtmꙋл ꙋnеї пꙋtерї maї ꙟnалtе, адекъ ал пꙋtерії 10леа, se ва гъsi ꙟntр' ачелаш кіп $log. 7^{10} = 10\ log. 7 = 8,4509800$.

Din каракtеріstiка ачеstꙋї логаріtm se араtъ, къ пꙋtереа 7^{10} se компꙋне де 9 цifре. Dар din tабледе логаріtmiче, каре копрінд mаntise кꙋ 6 saꙋ 7 цifре zечіmаде, пꙋmаї пꙋмере компꙋse de 5 цifре se пot хоtърꙟ кꙋ екzакtitate. Аша dар ла ꙟntꙟmпларе кꙟnd пꙋmъфꙋл, дꙋпъ аръtареа каракtеріstiчі логаріtmꙋлꙋї sеꙋ, ва копрінде maї mꙋлtе декꙟt 5 цifре, пꙋmаї челе din tꙟї цifре dеа stꙟnга se пot хоtърꙟ кꙋ екzакtitate. Ꙟntр'ачеst кіп se гъseще ла ачеаstъ ꙟntꙟmпларе ꙟn tабледе логаріtmiче:

$$8,4509877 = log.\ 282480000.$$
$$8,4509723 = log.\ 282470000.$$

Фiindкъ dар логаріtmꙋл de maї sꙋs zis 8,4509800 каde ꙟntpe aчeste doъ, ва fi ші 7^{10} maï mape deкꙟt нꙋmъpꙋл 282470000, ші maï miк deкꙟt 282480000.

§. 384. 2) Кꙟnd нꙋmъpꙋл кape este a se pꙟdiкa ла о пꙋtepe ва fi maï miк deкꙟt ꙋnimea, atꙋnчï логapitmꙋл aчeлꙋï нꙋmъp ва авea кapaкtepistiкъ neгatiвъ. Съ se кaꙋte s. п. логapitmꙋл пꙋtepiï a шaпtea din fpꙟnцepea $\frac{5}{9}$.

Съ se ꙟmmꙋлцeasкъ $log. \frac{5}{9} = 0,7447275$ (§. 378.) кꙋ esпonentꙋл пꙋtepiï, adeкъ кꙋ 7, ші ва fi:

$log. \left(\frac{5}{9}\right)^7 = 5,2130925 - 7$; saꙋ fiindкъ $5 - 7 = -2$

$log. \left(\frac{5}{9}\right)^7 = 0,2130925 - 2$.

Ла aчest логapitm кopespꙋnde нꙋmъpꙋл 0,016334.

§. 385. Daкъ se ва чepe логapitmꙋл ꙋneï ръdъчinï че este съ se sкоацъ dintp'ꙋn нꙋmъp dat, iapъші tpeбꙋe съ deosebim doъ ꙟntꙟmплъpï:

1) Кꙟnd нꙋmъpꙋл dat ва fi maï mape deкꙟt ꙋnimea, ші пpin ꙋpmape логapitmꙋл seꙋ нꙋ ва авea кapaкtepistiкъ negatiвъ, atꙋnчï съ se ꙟmпарцъ логapitmꙋл пpin esпonentꙋл padiкaл, ші кꙟtꙋл ва fi логapitmꙋл ръdъчinei. S. п.

$$log. \sqrt[5]{7\tfrac{13}{19}} = \tfrac{1}{5}\, log. \tfrac{146}{19} = \tfrac{1}{5}\, (log. 146 - log. 19)$$

$$\begin{array}{rl} log.\ 146 = & 2,1643729 \\ -log.\ 19 = & 1,2787536 \\ \hline & 0,8855993 : 5 = 0,1771198. \end{array}$$

Аша dap $log. \sqrt[5]{7\frac{13}{19}} = 0,1771198$.

Aчestꙋï логapitm кopъspꙋnde нꙋmъpꙋл 1,5035.

§. 386. 2) Кꙟnd нꙋmъpꙋл, din ръdъчina къpꙋia se чepe логapitmꙋл, ва fi maï miк deкꙟt ꙋnimea, ші пріп ѫрmаре караклеріstіка логоратmѫлѫі seѫ ва fi nегаlівъ, atѫnчї sъ se ↑mпарцъ ꙗръш at↑t mantisa, к↑t ші караклеріstіка nегаlівъ пріп esпопеntѫл радікал. Ла ачеаstъ ↑mпърціре doъ ↑n-t↑mпл ърї se пот іві, карактеріstіка орї se поаtе ↑m-пърці пріп esпопеntѫл радікал saѫ пѫ. Ла ↑nt↑m-пларea dіnt↑ї к↑tѫл ва авеа de карактеріstікъ ѫп пѫ-mър nегаtів dар ↑ntрег; ꙗр ла adoъa ↑nt↑mпларе карактеріstіка ва fi ѫп пѫmър fр↑nt (о fр↑nцере.)

Adекъ de se ва чере $log. \sqrt[3]{\frac{1}{731}}$

$$\text{fiind } log.\ 1 = 0$$

$$\text{ші } log.\ 731 = 2{,}8639174$$

se ва гъsi $log. \frac{1}{731} = 0{,}1360826-3$

каре ↑mпърціndѫse кѫ tреї ва da:

$$log. \sqrt[3]{\frac{1}{731}} = 0{,}0453609-1.$$

Ла ачеst логаріtm коресппѫnde пѫmърѫл 0,110097.

Dакъ se ва чере $log. \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$, ла ачеаstъ ↑nt↑mпларе

$$\text{fiind } log.\ 2 = 0{,}3010300$$

$$\text{ші } log.\ 7 = 0{,}8450980$$

$$\text{se ва гъsi } log.\ \tfrac{2}{7} = 0{,}4559320-1.$$

Акѫm де се ва ↑mпърці ачеst логаріtm кѫ 3 ва еші

$$log. \sqrt[3]{\frac{2}{7}} = 0{,}1519773-\frac{1}{3}.$$

Dар fiind къ ашъзареа ші ↑nтребѫінцареа табле-лор пресѫпѫпе карактеріstіче ↑ntреці, требѫе sъ se апере чінева de asemenea fр↑nцері; ші ачеаsta se поаtе фаче, dакъ ла карактеріstіка nегаtівъ а лога-ріtmѫлѫї пѫmърѫлѫї de-↑mпърціt se вор adъога а-t↑tea ѫnimї nегаtіве, к↑tе требѫеsк ка sъ se поатъ ↑mпърці sѫma акорат пріп esпопеntѫл радікал. Dар ка sъ пѫ se skimбе прецѫл логаріtmѫлѫї пріп asemenea adъогаре, требȣе sъ se adaoџe ші партea позітівъ а лȣї іаръш кȣ атітea позітіве ȣнімї. Аша ꙟн екземплȣл пречеdent se ва adъога ла логарітм сȣма каре se щерџе прін еа ꙟнсъш:

$+2-2=0$, ꙟнтр'ачеst кіп ва fi:

$$\log.\tfrac{2}{7}=0{,}4559320-1$$
$$\begin{array}{r} \log.\tfrac{2}{7}=0{,}4559320-1 \\ +2 \qquad\qquad -2 \\ \hline \end{array}$$
$\log.\tfrac{2}{7}=2{,}4559320-3$, каре ꙟмпърцindȣse кȣ 3, ва da:

$$\log.\sqrt[3]{\tfrac{2}{7}}=0{,}8186440-1.$$

Ла ачеst логарітм коресpȣnde нȣмърȣл 0,65863.

§. 387. Ка sъ se ꙟнцълеагъ маї біне ꙟнлеснірea че dъ калкȣлȣл логарітмік ла ꙟммȣлціре, ла ꙟмпърціре, ші маї алеs ла рidікаре ꙟн пȣтерї ші ла скоатерea ръdъчіnілор, вор fi ꙟndestȣле екземплеле ȣрмътоаре.

I. Sъ se гъsеаскъ прецȣл кътімеї $x=\frac{0{,}7538\,.\,9783}{0{,}0058\,.\,9809}$

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 0{,}7538 &=& 0{,}8772561-1. \\ +\log.\ \ 9783 &=& 3{,}9904721 \\ \hline \log.\ \text{нȣмърълорȣлȣї} &=& 3{,}8677282 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 0{,}0058 &=& 0{,}7634280-3 \\ +\log.\ \ 9809 &=& 8{,}9955913 \\ \hline \log.\ \text{нȣмітoрȣлȣї} &=& 1{,}7590193 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log.\ \text{нȣмър.} &=& 3{,}8677282 \\ -\log.\ \text{нȣміто.} &=& 1{,}7590193 \\ \hline \log.\ x &=& 2{,}1087089 \end{array}$$

ла каре логарітм коресpȣnde нȣмърȣл 128,4425...

Връnd sъ ꙟнтребȣінцъм компnементе dекаdіче, вом faче ȣн калкȣл маї сімплȣ ꙟнтр'ачеst кіп:

$$\begin{array}{rl} & \log.\ 0{,}7538 = 0{,}8772561 - 1 \\ & \log.\ \ 9783 = 3{,}9904721 \\ \text{компл. дек.} & \log.\ 0{,}0058 = 2{,}2365720 \\ \text{компл. dек.} & \log.\ \ 9899 = 6{,}0044087 - 10 \\ \hline \text{Sȣma caŭ} & \log.\ x = 2{,}1087089 \end{array}$$

II. Se чере прецȣл кътimeĭ $x = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{19}{13}\right)^3}$. Пentpȣ ꙟлesnipea калкȣлȣлȣĭ съ se pedȣкъ ачeastъ fpꙟnџepe ла fopma ȣpmътoape $x = \frac{7^2 \cdot 2^5 \cdot 13^3}{5^2 \cdot 3^5 \cdot 19^3}$, кape ва da:

$$\log.x = 2\ \log.7 + 5\ \log.2 + 3\ \log.13$$
$$- (2\ \log.5 + 5\ \log.3 + 3\ \log.19).$$

$$\begin{array}{rl} 2\ \log.\ 7 = & 1{,}6901960 \\ 5\ \log.\ 2 = & 1{,}5051500 \\ 3\ \log.\ 13 = & 3{,}3418302 \\ \hline \log.\ \text{нȣmъpъtopȣлȣĭ} = & 6{,}5371762 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2\ \log.\ 5 = & 1{,}3979400 \\ 5\ \log.\ 3 = & 2{,}3856065 \\ 3\ \log.\ 19 = & 3{,}8362608 \\ \hline \log.\ \text{нȣmitopȣлȣĭ} = & 7{,}6198073; \end{array}$$

npin ȣpmape

$$\begin{array}{rl} \log.\ \text{нȣmъpъtopȣлȣĭ} = & 6{,}5371762 \\ -\log.\ \text{нȣmitopȣлȣĭ} = & 7{,}6198073 \\ \hline \log.\ x = & 0{,}9173689 - 2 \end{array}$$

Ла ачest лoгapitm кopesнȣnde нȣmъpȣл
$$x = 0{,}082674\ldots$$

Фiind-къ $\log.\ 5 = 0{,}698700$, de ȣnde комплеmentȣл dekadik ал лȣĭ $= 9{,}3010300$, dakъ ачesta se ва ꙟmmȣлцi кȣ esnonentȣл пȣtepiĭ, adекъ кȣ 2, ва da комплеmentȣл dekadik $\log.\ 5^2 = 18{,}6020600$. Dap fiind-къ nentpȣ ачest комплеment dȣпъ adъoкаре требꙋе съ se лапеdе din сꙋmъ 20 ꙋnimĭ, съ se скоацъ ꙟndatъ, 10 ші ва fi комплементꙋл dекаdік $log.\ 5^2 = 8{,}6020600$.

Asemenѣa se гъсеще.

комплементꙋл dекаdік $log.\ 3^5 = 7{,}6143935$
ші комплементꙋл dекаdік $log.\ 19^3 = 6{,}1637392$.

Dакъ ачесте треĭ комплементе se вор adъога ла логаріtmiĭ челор треĭ fъкъторĭ ꙟn нꙋmърътор, о sінгꙋръ adъогаре ва da сꙋма 28,9173689, ші скъзꙟndꙋse пентрꙋ комплемент ші челелалте 30 ꙋnimĭ, se ва гъsі наръш $log.\ x = 0{,}9173689-2$.

III. Съ se скоацъ, пріn лꙋкраре кꙋ логаріtmĭ, ръdъчіна а треіа а нꙋmърꙋлꙋĭ $a = 18672899077$.

Din табле se гъсеще $log.\ a = 10{,}272117$, каре ꙟmпърцindꙋ-se кꙋ 3, dъ $log.\ \sqrt[3]{a} = 3{,}4237372$.

De ꙋnde ꙋасъ $\sqrt[3]{a} = 2653$, каре нꙋmър кореспꙋnde ла логаріtmꙋл afлаt.

Din алъtꙋрареа ачестꙋĭ калкꙋл кꙋ чел че s'a аръtat ла §. 286, пріn каре s'a скоs ачеѣаші ръdъчінъ, dар ꙟntр'алt кіп, se dоведеще ꙟndestꙋл требꙋінца логаріtmілор ꙟn asemenѣa пріbінцъ. Dар din прічіна мърцініреĭ tаблелор, нꙋmаĭ ачеле ръdъчінĭ se пот afла кꙋ акоpateцъ, каре нꙋ sꙟnt компꙋse de маĭ мꙋлte de кꙟt de чінчĭ нꙋmере..

IV. Съ se хоtъраскъ прецꙋл $x = \sqrt[7]{0{,}001}$.

Ла ачеаstъ ꙟntꙟmпларе ва fi $log.\ x = \frac{1}{7} log.\ 0{,}001$.

Dар $log.\ 0{,}001 = 0{,}0000000-3$. Акꙋm ка съ авеm кꙋ караktеpistіка неratіbъ а ачестꙋĭ логаріtm ꙋn нꙋmър ꙟntрег, ꙟmпърцindꙋ-se кꙋ 7, съ se adaoце $+4-4=0$ (§. 385) ші ва fi:

$log.\ 0{,}001 = 4{,}0000000 - 7$.

de ȣnde $log. x = \frac{1}{7} log. 0{,}001 = 0{,}5714286 - 1.$

aшa dap x, saȣ $\sqrt[7]{0{,}001} = 0{,}37275 \ldots\ldots$

V. Sъ se гъsѣaskъ преџȣл лȣĭ $x = 0{,}09\left(\frac{13}{15}\right)^{\frac{4}{5}}$

Ла ачѣastъ ꙟнтꙟмпларе ва fi:

$log. x = log. 0{,}09 + \frac{4}{5}\,(log. 13 - log. 15)$

$$\begin{array}{rl} log. 13 = & 1{,}1139434 \\ -log. 15 = & \underline{1{,}1760913} \\ log. \frac{13}{15} = & 0{,}9378521 - 1 \end{array}$$

De ȣnde $4\ log. \frac{13}{15} = 3{,}7514084 - 4$

$$\begin{array}{rl} + & \underline{1 \qquad\qquad -1} \\ & 4{,}7514084 - 5 \end{array}$$

Sъ se ꙟмпарџъ ачѣsta прin 5, шĭ ва fi:

$$\frac{4}{5}\ log. \frac{13}{15} = 6{,}9502817 - 1$$

Sъ se adaoџe $log. 0{,}09 = \underline{0{,}9542425 - 2}$

$$log. x = 0{,}9045242 - 2$$

Adeкъ $x = 0{,}080264 \ldots.$

VI. Sъ se гъsѣaskъ прin логарitmĭ преџȣл кътimeĭ

$x = \dfrac{\sqrt[3]{\left(3\sqrt[3]{3}\right)}}{\sqrt{(2\sqrt{2})}}$. Пропȣнерѣа se desлѣагъ ꙟntр'a-

чest кiп: $log. x = \frac{1}{3} log. 3\sqrt[3]{3} - \frac{1}{2} log. 2\sqrt{2}$ saȣ:

$log. x = \frac{1}{3}\left(log. 3 + \frac{1}{3} log. 3\right) - \frac{1}{2}\left(log. 2 + \frac{1}{2} log. 2\right)$

$$\begin{aligned} log.\,3 &= 0{,}4771213 \\ +\tfrac{1}{3}\,log.\,3 &= \underline{0{,}1590404} \\ log.\,3\sqrt[3]{3} &= 0{,}6361617 \\ \tfrac{1}{3}log.\,3\sqrt[3]{3} &= 0{,}2120539 = log.\sqrt[3]{\left(3\sqrt[3]{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} log.\,2 &= 0{,}3010300 \\ +\tfrac{1}{2}\,log.\,2 &= \underline{0{,}1505150} \\ log.\,2\sqrt{2} &= 0{,}4515450 \\ \tfrac{1}{2}\,log.\,2\sqrt{2} &= 2257725 = log.\sqrt{(2\sqrt{2})} \end{aligned}$$

fiind dap $log.\sqrt[3]{\left(3\sqrt[3]{3}\right)} = 0{,}2120539$
ші $- log.\sqrt{(2\sqrt{2})} = \underline{0{,}2257725}$
ва fi $log.\,x = 0{,}9862814-1$
кърѹіа лоrapitm корєспѹnde пѹтърѹл 0,968905 ...
аша dap $x = 0{,}968905\ldots$
Ачеѕаш s'ар пѹtѣа afла ші прin кіпѹл ѹрmътор:

$$x = \frac{\sqrt[3]{\left(3\sqrt[3]{3}\right)}}{\sqrt{(2\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt[9]{3^4}}{\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[36]{\frac{3^{16}}{2^{27}}};$$

прin ѹрmаре $x = \frac{1}{36}(16\,.\,log\,.\,3 - 27\,.\,log\,.\,2)$

$$\begin{aligned} 16\ log.\ 3 &= 7{,}6339408 \\ -27\ log.\ 2 &= \underline{8{,}1278100} \\ &\quad 0{,}5061308-1 \text{ saѹ dѹпъ §.386} \\ &\ +35 \qquad\qquad -35 \\ &\quad \overline{35{,}5061308-36} \end{aligned}$$

Съ se ꙟmпарцъ ачest лоrapitm кѹ 36 ші вот авѣа іаръш $x = 0{,}9862814-1$.

VII. Фіе $x = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Де ꙋnde $log.\, x = \frac{1}{2}\,[log.\,(5-\sqrt{5}) - log.\; 2]$
dap $log.\, x = 0{,}6989700$, каре ꙟmпърцindꙋ-se кꙋ 2 dъ: $log.\, x = 0{,}3494850$. Ла ачest логарitm коръспꙋnde nꙋmърꙋл 2,236068 ... de ꙋnde ꙋрmеазъ
$5-\sqrt{5} = 2{,}763932\ldots$

акꙋm авеm

$$\begin{array}{rl} log.\,(5-\sqrt{5}) & = 0{,}4415273 \\ -log.\; 2 & = 0{,}3010300 \\ \hline & 0{,}1404973 \end{array}$$

Ачеаstъ difеренцъ ꙟmпърцindꙋ-se кꙋ 2 ва da:

$log.\, x = 0{,}0702486$

шi $x = 1{,}17559\ldots$

De Екꙋацiї.

§. 388. Е к ꙋ а ц i е se ziче о еspресie алцебрiкъ, каре аратъ потрiвiреа а доъ кътimї. Аша dap Екꙋацia este компꙋsъ de доъ кътimї de о потрiвъ ꙋnа кꙋ алта, легате прin semnꙋл потрiвiреї = пꙋs ꙟntре еле amꙟndoъ; adекъ $P=R$ ꙟnsemnеазъ къ кътimеа P шi R sꙟnt d'опотрiвъ. Сꙋб лiтерiле P шi R se ꙟnцелег tot фелꙋл de кътimї алцебрiче, atꙟt simпле кꙟt шi компꙋse, фрꙟnte шi ꙟntреџї, рацiонале шi iрацiонале. Ꙋne орї se ꙟntꙟmплъ ка ꙋnа din amꙟndoъ кътimiле sъ аїбъ ꙋn преџ nꙋmерiк хотърꙟt, saꙋ поате sъ fie nꙋmaї о nꙋлъ. Asфел de екꙋацie $P=0$ аратъ къ терminiї din каре P este компꙋs se шерг ꙋnꙋл кꙋ алтꙋл. Кътimiле P шi R каре ꙟn екꙋацia $P=R$ se компаръ ꙋnа кꙋ алта, se nꙋmesк п ъ р ц ї а л е е к ꙋ а ц i е ї, шi ꙟnsъ P п а р t е а ꙟ n t ꙟ е шi R п а р t е а а d о ъ а. Кꙋ тоате ачестеа se ꙟnцелеџе de sineш къ потрiвiреа nꙋ se stрiкъ daкъ se ва sкimба локꙋл ачестор пърцї, пꙋindꙋѕе партеа ѫнтѫї ѫн локꙋл челії de adoiлеа, ші dinпротівъ; adекъ de ва fi $P = R$, ва fi ші $R = P$.

Dакъ амѫndoъ пърціле ꙋнеї екꙋаціï вор fi ші ѫн а лор еsпресie de о потрівъ ꙋна кꙋ алта, прекꙋm $P = P$, adекъ нꙋ нꙋмаї съ fie de опотрівъ чі ші асеменеа о парте кꙋ чеа-л-алтъ, атꙋнчї se zіче къ ачеа екꙋаціе аре identitate. S. п. $\frac{ax+b}{c} = \frac{ax+b}{c}$.

§. 389. Dакъ din амѫndoъ пърціле екꙋаціеї $P + Q = R + Q$ se ва skъdеа кътімеа Q, ва fi ші $P = R$. (§. 13). ші dакъ ла fieкаре парте а екꙋаціеї $P - Q = R - Q$ se ва adъога кътімеа Q, ва fi $P = Q$ (§. 10). Аша dар кѫnd ѫн амѫndoъ пърціле екꙋаціеї se ва afла ачелаш термin, ачела se ва пꙋтеа щерце, fъръ de а se stріка потрівіреа челор лалте ръмасе пърцї.

Dакъ adекъ ва fi: $P \pm Q = R \pm Q$,
ва fi ші $P = R$, ші віче верsа.

§. 390. Dакъ din амѫndoъ пърціле екꙋаціеї $P + Q = R$ se ва skъdеа терminꙋл Q ва еші $P = R - Q$. Ші dакъ ла fieш каре парте а екꙋаціеї $P - Q = R$ se ва adъога терminꙋл Q, вом авеа $P = R + Q$. Аша dар fie каре нꙋмър se поате mꙋта dintр'о парте а екꙋаціеї ѫн чеалалтъ, fъръ de а se stріка потрівіреа лор, dакъ semнꙋл терminꙋлꙋї mꙋтат se ва skimба ѫн semнꙋл чел dinпротівъ.

De обще de ва fi: $P \mp Q = R$. ва fi ші $P = R \pm Q$.

§. 391. Кѫnd тоції терminії fieкъріа пърцї se вор mꙋта ѫн чеа лалтъ парте, атꙋнчї semнеле тꙋтꙋрор терminілор se вор skimба; ші dакъ ші пърціле ачецiї adoїлea екўацiї se вор maї mѕta ѕna ѫn локѕл чеїлалte, екўацia ѩаръш ва ръmѫnea nestpікatъ (§. 388). Аша dap екўацia nѕ se stpікъ, dакъ лъsѫndѕ-se tepminiї ѫn пърцiле лор, se вор mѕta deodatъ toate semnele лор.

Adекъ dакъ ва fi: $P+Q-R=S-U$

ва fi ші $-P-Q+R=-S+U$.

§. 392. Dакъ toцї tepminiї екўацiеї se вор ашъza nѕmaї ѫntp'o паpte, sѕma лор ва fi $=0$. Adекъ dакъ ѫn екўецia $P+Q=R-S$, tepminiї R ші $-S$ din паptea adoъa se вор ашъza ѫn паptea ѫntѫї, nѕ ва ръmѫnea nimік ѫn паptea adoъa, аша dap ва fi $P+Q-R+S=0$.

§. 393. Челе d'опоtpівъ ѫmпърцindѕ-se пpiн кътimї d'опоtpівъ daў кѫtѕpї d'опоtpівъ. Dакъ dap amѫndoъ пърцiле екўацiеї $AP+Q=R$ se вор ѫmпърцi пpin B, ва еші о поъ екўацie:

$$\frac{AP+Q}{B}=\frac{R}{B};\ \text{saў}\ \frac{AP}{B}+\frac{Q}{B}=\frac{R}{B}.$$

Аша dap dакъ toцї tepminiї екўацiеї вор копpinde вpe ѕn fъкътор komѕn, ачea екѕацie se поate fаче maї simплъ, ѫmпърцind toцї tepminiї eї пpintp'ачел fъкътор. Іар dакъ ва fi sъ se desfакъ ѕnѕл din tepminї, s. п. AP de fъкъtopѕл seў A, se ва ѫmпърцi toatъ екўацia, adекъ fie каpe tepmin ал eї, пpin fъкъtopѕл A, ші ва еші: $P+\frac{Q}{A}=\frac{R}{A}$.

§. 394. Кътimї d'опоtpівъ ѫmmѕлцite пpin nѕmepe d'опоtpівъ daў пpodѕкte d'опоtpівъ. Dакъ adекъ amѫndoъ пърцiле екўаціеї $\frac{P}{A}+Q=R$ se вор ѫmmѫлці кѫ B, se ва наще ѫрmъtoaрєa екѯаціе:

$$\left(\frac{P}{A}+Q\right)B=RB \text{ saѯ } \frac{BP}{A}+BQ=BR.$$

Аша dар потрівірєa пърцілор ѫп екѯаціе пѫ se stрікъ, кѫnd тоці терміnії еї se вор ѫmmѫлці прiп ачелаш fъкъtор.

Dакъ ѫп екѫаціa de маї sѫs se ва лѫа $A=B$, se ва face $P+AQ=AR$. Аdекъ fie каре термin ал ѫпеї екѯаціі se поате desface de ѫmпърціторѫл съѯ, кѫnd тоатъ екѯаціa, adекъ тоці терміnії еї, se вор ѫmmѫлці прiпtр'ачеst ѫmпърціtор.

§. 395. Dакъ пѫмере d'опоtрівъ se вор рѫdіка ла ачелєаш пѫтерї, вор fi ші ачеstе пѫтерї ѫпsъш d'опоtрівъ. Аша dар fiind $A+P=Q$, ѫрмєазъ а fi ші $(A+P)^m=Q^m$. Ші de ва fi $\sqrt[m]{(A+P)}=Q$, ва fi ші $A+P=Q^m$.

§. 396. Dакъ din пѫмере d'опоtрівъ se вор sкоаtе ачелєаш ръdъчіпї, ші ачеstе ръdъчіпї ѫпsъш вор fi d'опоtрівъ. Аdекъ din екѯаціa $P=Q$ ва пѫtєa еші ачєаstъ алtъ екѯаціе $\sqrt[m]{P}=\sqrt[m]{Q}$.

§. 397. Фііndкъ ла пѫмере d'опоtрівъ, ѫп ачєаш sistемъ, коръsпѫnd логаріtмї d'опоtрівъ, se поате ѫпкеѩ къ ва fi: $log. P=log. Q$, кѫnd ва fi $P=Q$.

§. 398. Ѫпtребѫінцарєa екѯаціілор este пепtрѫ а se хотърѫ пређѫріле кътімелор некѫпоскѫte din dателе релаціі че аѯ аtѫt ѫпtре еле ѫпsъші, кѫt ші ѫпţре кътimеле кѹnоsкѹtе. Ачеste релаціĭ se ţраг din kondiціiле черерiĭ пропѹse, dе ачеа kondiціiле ачеstеа требѹе съ fie asfел, ꙟнкꙟt din трꙟnsеле съ se поатъ ашъzа о екѹаціе ꙟntре кътimiле кѹnоsкѹtе шi ꙟnтре челе некѹnоsкѹtе. Кѹm ꙟnsъ din kondiціiле проблемелор съ se формеzе екѹаціiле, нѹ se поате ꙟnвъца прin регѹлĭ џенерале. Прецѹрiле кътimелор некѹnоsкѹtе se ꙟnфъцішеz прin челе dѹпъ ѹрmъ лiтере але алфабетѹлѹĭ, ка съ se поатъ dеоsебi маĭ лesne din кътimiле челе кѹnоsкѹtе, саѹ каре se sокоtesк a fi asfел, шi пентрѹ каре se пѹn лiтерiле челе din тꙟꙟ але алфабетѹлѹĭ. Dѹпъ ачеаsta чеа че требѹе а se ꙟнгрiжi маĭ кѹ sеамъ, este ка ꙟнклiнърiле шi легътѹрiле прin каре кътimiле стаѹ ꙟn релаціе, съ se ꙟnфъцішеzе кѹ dреантъ кѹџеtаре прin semнеле алџебрiче.

Екzемпле:

I. Съ se ꙟмпарцъ нѹмърѹл 60 ꙟn доъ пърцĭ, каре съ аĭбъ ꙟntре еле релаціе прекѹm $2 : 3$.
Dакъ о парте se ва пѹне $= x$; чеалалтъ ва fi $= 60 - x$. Аша dар dѹпъ kondiціа черерiĭ требѹе съ fie $x : 60 - x = 2 : 3$; din каре пропорціе se формеазъ екѹаціа $3x = 2(60 - x)$.

II. Se чер доъ нѹмере, din каре ѹнѹл съ fie ꙟndoit декꙟt челълалт; ꙗр dакъ fie каре dintр'ачеste нѹмере se ва miкшора кѹ 20 ѹнimĭ, ръмъшiца челѹĭ dintꙟꙟ съ fie de треĭ орĭ маĭ маре декꙟt ръмъшiца челѹĭлалт. Фie челе доъ нѹмере черѹte x шi y. Чеа dintꙟĭ kondiціе se ꙟnфъцішеазъ прin екѹаціа $x = 3y$; чеалалтъ прin екѹаціа $x - 20 = 3(y - 20)$.

III. De se va чере нȣмърȣл x, каре съ fie maĭ mape dekѫt ръdъчina пътpatъ a лȣĭ кȣ doъ ȣnimĭ, kondiцia ачещiĭ черерĭ se va ѫmплini npin екȣaцia $x = 2 + \sqrt{x}$.

§. 399. Dȣпъ че se afлъ ашъzарea екȣaцieĭ, лesne se гъseщe dintp'ѫnsa преџȣл некȣnoskȣteĭ. Sпре ачest sfѫpшit, maĭ ѫntѫĭ tpeбȣe съ se skaпе екȣaцia de fpѫnџеріле ачелеа aĭ кърора нȣшitopĭ копрind кътimea некȣnoskȣтъ; шi dakъ некȣnoskȣta va авea semнȣл ръdъчineĭ, шi ачеста tpeбȣe съ skoaцъ. Екȣaцia asfeл tpansfopmatъ va копрinde нȣmaĭ paцionaле пȣtepĭ але некȣnoskȣteĭ. Акȣm dakъ tepminiĭ eĭ se вор ашъza ѫntp'o napte a екȣaцieĭ, шi se вор pѫndȣi dȣпъ нȣмърȣл пȣtepiлop, atȣnчĭ se ziче къ екȣaцia este **pѫndȣitъ**, ашъzatъ dȣпъ pѫnd.

Екzemпле:

I. Съ se pѫndȣeaskъ екȣaцia $\frac{3+7x}{4-3x} = 5$,

Ѫmmȣлцindȣ-se ачeastъ екȣaцie кȣ нȣmitopȣл eĭ $4-3x$, va eшi $3+7x = 20 - 15x$.

Съ se ашaze тоцĭ tepminĭ ѫn naptea ѫntѫĭȣ a екȣaцieĭ шi va fi $3+7x-20+15x=0$.

Съ se pedȣкъ ѫnsfѫpшit tepminiĭ omoџenĭ, шi va eшi екȣaцia pѫndȣitъ $22x-17=0$.

II. Asemenea съ se pѫndȣeaskъ екȣaцia $\frac{3-5x}{4-x} = \frac{2+7x}{5+3x}$. Ачeastъ екȣaцie ѫmmȣлцindȣ-se кȣ $(4-x)(5+3x)$, va da $(3-5x)(5+3x) = (2+7x)(4-x)$.

Desвoлtѫndȣ-se ачeste npodȣkte, шi pedȣкѫndȣ-se tepminiĭ, va eшi: $8x^3 + 42x - 7 = 0$.

III. Екѕаціа $\frac{7x-5}{3x+1}+\frac{2x-1}{2x+1}=5x-3$ desfъкѕtъ de fрѫнцерї дъ:
$(7x-5)(2x+1)+(2x-1)(3x+1)=(5x-3)(3x+1)(2x+1)$; fормѫндѕ-se ачесте продѕкtе ші редѕкѫндѕ-se тepменiї, se ва гъsi: $30x^3-13x^2-6x+3=0$.

§. 400. De ва fi съ se desfакъ некѕnоsкѕta de семнѕл радiкал, atѕнчї съ se вазъ маї ѫнтѫѕ, дакъ екѕаціа копрinde ѕнѕл саѕ маї мѕлцї тepменї ipaціоналї; ла ѫнтѫѕл каz съ se треакъ тоцї тepменiї раціоналї ѫнтр'о парте а екѕаціеї, ръмѫind ѫн чеа-л-алтъ парте нѕмаї тepменiї чеї ipaціоналї; дѕпъ ачеа съ se ридiче fie-каре парте а екѕаціеї ла пѕтереа ачеа, ал кърia esпоnent съ fie d'опоtрiвъ кѕ esпоnentѕл семнѕлѕї радiкал каре есте съ se лапеде.

Екzемпле:

I. Se чере а se фаче раціоналъ екѕаціа $5x-3\sqrt{x}=7$ Ашъzѫндѕ-se тepменiї раціоналї ѫнтр'о парте, чеї ipaціоналї ѫн чеа-л-алтъ парте, ші ридiкѫндѕ-se екѕаціа $5x-7=3\sqrt{x}$ ла пѕтереа адоъа, ва fi $25x^2-70x+49=9x$, каре ашъzѫндѕ-se дѕпе рѫнд ѩсъ $25x^2-79x+49=0$.

II. Съ se факъ раціоналъ екѕаціа

$3\sqrt[3]{(x+2)}=3x+\sqrt[3]{(x+2)}$. Ѫнтр'ачеаstъ екѕаціе тepменiї ipaціоналї din амѫндоъ пърціле сѫнт омоцені, аша дар se пот адѕна тоцї ѫнтр'ѕн тepмин ші ашъzѫндѕ-se ѫнтр'о парте а екѕаціеї ѩсъ $2\sqrt[3]{(x+2)}=3x$. Ачеаstъ екѕаціе рѫдiкѫндѕ-se акѕм ла пѕтереа а треia se фаче $8(x+2)=27x^3$, саѕ $27x^3-8x-16=0$.

III. Екȣаціа $\sqrt[m]{(2x-1)}=\sqrt[2m]{(x+2)}$ se face раціоналъ, кꙟnd fie-каре парте a екȣаціеĭ se ва рidiка ла пȣтереа $2m$, adeкъ: $\sqrt[m]{(2x-1)^{2m}}=x+2$ шi $(2x-1)^2=x+2$ saȣ $4x^2-4x+1=x+2$, каре екȣаціе рꙟdȣindȣ-se, ва da $4x^2-5x-1=0$.

§. 401. Кꙟnd екȣаціа ва копріnde маĭ мȣлціĭ терменĭ етероценĭ іраціоналĭ, атȣнчĭ еа se ва пȣтеа desface de ачеĭ термінĭ, нȣмаĭ dакъ амꙟndoъ пърціле екȣаціеĭ se вор рꙟdiка пе рꙟnd ла пȣтеріле тȣтȣрор еsпоненцілор че se афлъ ꙟn semnȣл радiкал.

Екzемпле:

I. Sъ se факъ раціоналъ екȣаціа
$2\sqrt{(x+2)}-3\sqrt{(x-1)}=5\sqrt{(2x-3)}$. Рꙟdiкꙟndȣ-se ла пътрат амꙟndoъ пърціле але ачеціĭ екȣаціĭ, вор da: $4(x+2)+9(x-1)-12\sqrt{[(x+2)(x-1)]}=25(2x-3)$.

Фъкꙟndȣ-se лȣкрареа ꙟмиȣлціреĭ ꙟntр'ачеаstъ екȣаціе, редȣкꙟndȣ-se терміниĭ, шi ашъzꙟndȣ-se чеĭ раціоналĭ ꙟntр'о парте шi чеĭ іраціоналĭ ꙟntр'алта, ва еші:
$74-37x=12\sqrt{(x^2+x-2)}$.

Ачеаstъ екȣаціе рꙟdiкꙟndȣ-se іаръш ла адоъ пȣтере, вом авеа:
$5476-5476x+1369x^2=144x^2+144x-288$,
saȣ редȣкꙟndȣ-se терміниĭ:
$1225x^2-5620x+5764=0$.

II. Sъ se факъ раціоналъ екȣаціа $3\sqrt{x}-1=2\sqrt[3]{x}$. Рꙟdiкꙟnd амꙟndoъ пърціле екȣаціеĭ ла пȣтереа а треіа, вом авеа $27x\sqrt{x}-27x+9\sqrt{x}-1=8x$. saȣ $9(3x+1)\sqrt{x}=35x+1$.

Ачeastъ екȣаціе рѫdікѫndȣ-se ла adoьа пȣtере, ва da:

$81(9x^2+6x+1)x = 1225x^2 + 70x + 1$, saȣ

$729x^3 + 486x^2 + 81x = 1225x^2 + 70x + 1$

ші редȣкѫndȣ-se

$729x^3 - 739x^2 + 11x - 1 = 0.$

§. 402. Ѫn sfѫрuіt din екȣаціа ордіnatъ тревȣе sъ se хотъраskъ прецȣл кътіmeĭ чеĭ некȣnoskȣtъ, ші dakъ прецȣл afлat ва fi чел adeвърat, пȣіndȣ-se ачеsta ѫn екȣаціа datъ ѫn локȣл некȣnoskȣteĭ, ва тревȣі sъ dea totdeaȣna о екȣаціе de identitate. S. п. de se ва sokoti ѫn екȣаціа $3x^2 - 5x + 2 = 0$ некȣnoskȣta $x = 1$, ва еші: $3 - 5 + 2 = 0$, saȣ $0 = 0$: аша dар $x = 1$ este adeвъратȣл прец ал некȣnoskȣteĭ ѫn екȣаціа datъ. Dар ачeastъ metodъ de a afлa прецȣл atѫрпъ de ла чеа maĭ mape пȣtере ла каре se afлъ рѫdікatъ некȣnoskȣta ѫn екȣаціа datъ.

§. 403. Екȣаціа ордіnatъ se zіче къ este de градȣл ѫntѫĭȣ, dakъ еа пȣ копріnde вре о алтъ пȣtере а некȣnoskȣteĭ deкѫt пȣтереа ѫntѫĭȣ. Фіе-каре asemenea екȣаціе se ѫnfъцішеazъ прin formȣла џенеpaлъ $Px - Q = 0$, ѫn каре P ші Q ѫnfъцішеazъ кътіmĭ кȣnoskȣte, ші прецȣл некȣnoskȣteĭ se хотъраще mȣtѫndȣ-se кътіmea Q ѫn чеа-л-алтъ парте а екȣаціеĭ, ші ѫmпърціndȣ-se toatъ екȣаціа прin конfъкъторȣл P ал некȣnoskȣteĭ x; asfeл ва fi $x = \frac{Q}{P}$.

Екzemплe:

I. Ѫntр'ачest кіп din екȣаціа $a(b+cx) = d(f+gx) + h$ вom авеа: $x = \frac{df + h - ab}{ac - dg}$.

II. Екȣаціа $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{fx}{k}=h+\frac{mx}{n}$. dъ

$$x=\frac{bdhkn}{adkn+bckn+bdfn-bdkm}.$$

III. Din $(ax+b)\,(cx+d)=(ax+f)\,(cx+g)+h$.

Ва еші $x=\frac{h+fg-bd}{a(d-g)+c(b-f)}$.

IV. $\frac{ax^m}{b+cx}=\frac{dx^m}{f+gx}$, ꙟmпърцindȣ-se кȣ x^m ва da

$\frac{a}{b+cx}=\frac{d}{f+gx}$, din каре ва еші: $x=\frac{bd-af}{ag-cd}$.

V. $\frac{ax^{m+1}}{c+dx}=bx^m$. ꙟmпърцindȣ-se ші ачеastъ екȣа-ціе кȣ x^m ва da $\frac{ax}{c+dx}=b$, de ȣnde $x=\frac{bc}{a-bd}$.

VI. $a\sqrt[n]{(b+cx)}=f+d\sqrt[n]{(b+cx)}$.

Кътіміле радікале de ачелаш fел ашъзꙟndȣ-se ꙟn партеа d'ꙟntꙟiȣ, daȣ:

$(a-d)\sqrt[n]{(b+cx)}=f$

ші амꙟndoъ пърціле рꙟdiкꙟndȣ-se ла пȣтереа n

$(a-d)^n\,(b+cx)=f^n$,

de ȣnde гъsim $x=\frac{f^n-b(a-d)^n}{c(a-d)^n}$.

VII. Фіе $a\sqrt[n]{(b+cx)}=d\sqrt[n]{(f+gx)}$.

Съ se рідіче амꙟndoъ пърціле ла пȣтереа n, ші ва еші $a^n\,(b+cx)=d^n\,(f+gx)$; каре ва da

$x=\frac{d^nf-a^nb}{a^nc-d^ng}=\frac{a^nb-d^nf}{d^ng-a^nc}$. (§. 154.)

VIII. $\sqrt[n]{(a+bx)}=\sqrt[2n]{(f+gx+b^2x^2)}$.

Рѫdikѫndȣ-se amѫndoъ пърцiле екȣацieĭ ла пȣterea n se ва fаче: $(a+bx)^2=f+gx+b^2x^2$.

saȣ $a^2+2abx=f+gx$, de ȣnde $x=\frac{a^2-f}{g-2ab}$.

IX. $ax+\sqrt{(b^2+cx+a^2x^2)}=f$.

Мȣtѫndȣ-se кътimea ax ѫn чеа-л-алтъ parte а е-кȣацieĭ, ва fi $b^2+cx+a^2x^2=f^2-2afx+a^2x^2$,

шi $x=\frac{f^2-b^2}{2af+c}$.

X. $\frac{a+b\sqrt[n]{(h+x)}}{c+d\sqrt[n]{(h+x)}}=f$.

Маĭ ѫntѫĭȣ съ se desfакъ ачеastъ екȣацie de fрѫn-цере, шi ва fi:

$a+b\sqrt[n]{(h+x)}=cf+df\sqrt[n]{(h+x)}$, saȣ

$(b-df)\sqrt[n]{(h+x)}=cf-a$, шi

$\sqrt[n]{(h+x)}=\frac{cf-a}{b-df}$.

Рѫdikѫndȣ-se ачеastъ екȣацie іаръш ла n пȣtere, ва еші $h+x=\left(\frac{cf-a}{b-df}\right)^n$, din каре

$x=\left(\frac{cf-a}{b-df}\right)^n-h$.

§. 404. Дакъ ѫntр'о екȣацie кътimea чеа некȣ-noskȣtъ ва fi esponent ал ȣneĭ кътimĭ кȣnoskȣte, прекȣm ѫn екȣацiа $a^x=b$; atȣnчĭ прецȣл некȣno-skȣteĭ se ва пȣtea гъsi nȣmaĭ прin ажȣtорȣл логаrit-mілор; adeкъ dȣпе (§. 397.) авem $log.\ a^x=log.\ b$, шi dȣпе (§. 363.) $log.\ a^x=x\ log.\ a$; прin ȣрmаре ва fi шi $x\ log.\ a=log.\ b$, шi $x=\frac{log.\ b}{log.\ a}$.

Пентрꙋ ачелаш кꙋвѫнт, din екꙋаціа $fa^{mx+n}=hb^{rx+s}$, se ва faче

$log.f+(mx+n)\ log.a=log.h+(rx+s)\ log.b$, saꙋ

$log.f+mx\ log.a+n\ log.a=log.h+rx\ log.b+s\ log.b$,

ші ашъzѫndꙋ-se toate чеꙁе кꙋnoskꙋte ѫntр'о парте аекꙋаціеї ші чеꙁе некꙋnoskꙋte ѫn чеа-ꙁ-аꙁтъ парте, ва fi:

$mx\ log.a-rx\ log.b=log.h-log.f+s\ log.b-n\ log.a$

saꙋ

$x(m\ log.a-r\ log.b)=log.h-log.f+s\ log.b-n\ log.a$

ші $x=\dfrac{log.h-log.f+s\ log.b-n\ log.a}{m\ log.a-r\ log.b}$.

Ачеꙁаш пређ s'ар пꙋтеа afꙁа пріn ꙁꙋкрареа ꙋрmътоаре: Екꙋаціа datъ este кꙋ totꙋꙁ de о потрівъ кꙋ ачеаsta

$f.a^{mx}.a^n=h.b^{rx}.b^s$.

Ѫmпърціndꙋ-se ачеаstъ екꙋаціе кꙋ $f.a^n.b^{rx}$, ва еші

$\dfrac{a^{mx}}{b^{rx}}=\left(\dfrac{a^m}{b^r}\right)^x=\dfrac{h.b^s}{f.a^n}$, de ꙋnde ꙗръш

$x(log.a^m-log.b^r)=log.h+s\ log.b-log.f-n\ log.a$

saꙋ $x=\dfrac{log.h+s\ log.b-log.f-n\ log.a}{m\ log.a-r\ log.b}$.

De Екꙋаціі Пътрате.

§. 405. Екꙋаціе de градꙋꙁ аꙁ doїꙁеа saꙋ екꙋаціе пътратъ este ачеа, ѫn каре, dꙋпъ че s'аꙋ орѫndꙋit toцї терminiї, нꙋ se afꙁъ рѫdiкатъ некꙋnoskꙋta ꙁа о пꙋтере маї маре, de кѫt ꙁа а doъа пꙋтере. Еа se нꙋмеще екꙋаціе пътратъ desъвѫршitъ saꙋ екꙋаціе пътратъ amesteкатъ, кѫnd пе ꙁѫngъ а doъа пꙋтере se afꙁъ ѫntр'ѫnsa ші ѫntѫia пꙋтере а некꙋnoskꙋteї.

Орї-каре asemenеа екꙋаціе se поate ѫnfъціша пріn formula ценералъ $Ax^2+Bx+C=0$, ɪn каре літеріле A, B, C, ɪnsemneazъ кътимі кunoskute, fie nozitive saŭ negative.

De vom ɪmпърці ачеastъ екuаціе ɪntреагъ пріn konfъкъторul A ал пътратuлuі nекunoskutеі, vom авеа: $x^2+\frac{Bx}{A}+\frac{C}{A}=0$, saŭ dакъ nentрu skurtаре

vom lua $\frac{B}{A}=P$ ші $\frac{C}{A}=Q$, ва fi $x^2=Px+Q=0$.

Ла ачеastъ formъ треbuе sъ se noatъ aduче орі-каре екuаціе пътратъ desъвɪршitъ.

§. 406. Екuаціе кurат пътратъ se numеще ачееа ɪn каре лipseще путереа ɪntɪю а nекunoskutеі. О asemenеа екuаціе este алкътuitъ numaі de doъ кътимі, adeкъ de un пътрат ал nекunoskutеі ші de вре'о алтъ espresie de кътиме, ші ɪn орі-каре ɪntɪмпларе se noate aduче ла forma $x^2=Q$.

§. 407. Dintр'о екuаціе кurат пътратъ $x^2=Q$, se noate afла преціuл nекunoskutеі, dакъ se ва skoate ръдъчіna пътратъ din amɪndoъ пърціле екuаціеі. Dар fiind-къ (§. 255.) ръдъчіna пътратъ se noate lua ші nozitivъ ші negativъ, ва fi $x=\pm\sqrt{Q}$, каре ва sъ zікъ, ɪntр'о екuаціе кurат пътратъ nекunoskuta аре doъ преціurі, еа este adeкъ de о notрivъ кu ръдъчіna nozitivъ saŭ negativъ din datеле кътимі кunoskute,

Екzemпле:

I. Фіе $(58+x)(58-x)=1600$; se чере преціuл луі x.

De vom face lucrarea ɪnmulціреі, vom авеа:
$3364-x^2=1600$ saŭ $3364-1600=x^2$,
аша dар $x^2=1764$, ші $x=\pm\sqrt{1764}=\pm 42$.
De обще, de ва fi $(a+x)(a-x)=b$, ва еші
$x^2=a^2-b$, ші $x=\pm\sqrt{(a^2-b)}$.

II. Екѕація $(x+a)(a-x)=b$, dъ $x^2-a^2=b$, saѕ $x^2=a^2+b$, ші $x=\pm\sqrt{(a^2+b.)}$
De se ва sокоti $a=3$ ші $b=9$, ва еші
$x=\pm\sqrt{(9+9)}=\pm\sqrt{18}=\pm3\sqrt{2}$.

III. $\frac{ax+b}{cx+d}+\frac{ax-b}{cx-d}=f$ dъ:
$(ax+b)(cx-d)+(ax-b)(cx+d)=f(cx+d)(cx-d)$. Фъкѫndѕ-se лѕкрарєа ѫmmѕлцірei, ші ашъzѫndѕ-se toate кътiміле чеде nекѕnosкѕte ѫntр'о парte а екѕацієi ші чѐле кѕnosкѕte ѫn чеєа-л-алтъ парte, ва fi: $(2ac-c^2f)x^2=2bd-d^2f$ ші $x=\pm\sqrt{\frac{d(2b-df)}{c(2a-af)}}$.

§. 408. Dакъ ѫntр'о екѕаціе кѕрат пътрatъ ва fi пътрatѕл nекѕnosкѕtei de о потрівъ кѕ ѕn нѕмър nеratiв, saѕ $x^2=-Q$, atѕnчi fiind къ este $x=\pm\sqrt{-Q}$, nѕ se ва гъsi пеntрѕ x нічі ѕn прец adевърat, прin каре sъ se ѫmпліnєаskъ kondiціа проблеmei, чі ва fi прецѕл лѕi x о кътime nеnѕtinчioasъ, ші nѕmai о asemenєа кътime пѕindѕ-se ѫn екѕаціа datъ ѫn локѕл nекѕnosкѕtei, поate пъstра identitatєа екѕацієi. Asfeл, s. п. екѕаціа $25-x^2=26$ копріnde кѣар ѫn kondiціа sа о kontраzічере; къчі este кѕ nеnѕtinцъ ка ѕn нѕмър позitiв, (прекѕm trебѕе sъ fie x^2, dѕпе §. 217), skъzѫndѕ-se dintр'алtѕл кѣар позitiв, sъ dєа о ръмъшіцъ, каре sъ fie mai маре dекѫt нѕмърѕл чел de-skъzѕt. Аша dар nѕ este нічі ѕn прец пѕtinчios пеntрѕ x, каре sъ ръsпѕnzъ ла ачеastъ екѕаціе; dар ші прin desлегарєа ачещіi екѕаціi se гъseще $x=\pm\sqrt{-1}$, каре este кѣаръш о кътime nеnѕtinчioasъ, ші fiind къ, dѕпе §. 257, este потрівірєа ѕрmътoaре: $(\pm\sqrt{-1})^2=-1=x^2$, прецѕл ачеsta ал некȣnoskȣtei пȣindȣ-se ꙟn екȣаціа datъ, ва fi: $25-(-1)=26$, adeкъ, $25+1=26$.

§. 409. Dакъ ꙟn formȣла џенералъ че s'а аръtat mai sȣs пentpȣ o екȣаціе пътpатъ $x^2+Px+Q=0$ коnfъкъtopȣл P ал некȣnoskȣtei de пȣtepea ꙟntꙟiȣ̆ ва fi de o notpiвъ лȣi o, adeкъ $Px=0$, atȣnчi ва fi $x^2+Q=0$ o екȣаціе кȣpat пътpатъ, ші dакъ ꙟntp' ачеваш вpeme ва fi Q ȣn нȣмъp nozitiв, x ва авеа doъ пpeцȣpi neпȣtinчioase, adeкъ $x=+\sqrt{-Q}$ ші $x=-\sqrt{-Q}$. Iap de ва fi Q нeratiв, adeкъ $x^2-Q=0$, atȣnчi x ва авеа doъ пȣtinчioase пpeцȣpi, adeкъ $x=+\sqrt{Q}$. ші $x=-\sqrt{Q}$.

§. 410. Съ лinseaskъ кътimea Q din екȣаціа џенералъ $x^2+Px+Q=0$, saȣ̆ fie $Q=0$. Ла ачеаstъ ꙟntꙟmnлаpe ва fi $x^2+Px=0$, saȣ̆ desfъкꙟndȣ-se паptea чеа dintꙟiȣ̆ a екȣаціеі ꙟn fъкъtopii ei: $x(x+P)=0$. Ка съ fie ꙟnsъ ȣn пpodȣкt de o notpiвъ лȣi o, тpeвȣe съ fie ȣn fъкъtop $=0$, de ачеа opi $x=0$ saȣ̆ $x+P=0$ mit $x=-P$. Аша dap ші ла ачеаstъ ꙟntꙟmnлаpe некȣnoskȣta ꙟn екȣаціа $x^2+Px=0$ аpe doъ пpeцȣpi, adeкъ opi $x=0$ saȣ̆ $x=-P$.

Екzemплȣ:

Din екȣаціа $(2x+3)(5x-7)=(x+7)(4x-3)$, кape пentpȣ skȣptape съ o нȣmim A, ва еші $6x^2-24x=0$ saȣ̆ $x^2-4x=0$; аша dap $x=0$ saȣ̆ $x=-(-4)=4$. Dакъ ꙟn Екȣаціа A se ва пȣne пpeцȣл чел dintꙟiȣ̆ $x=0$, ва fi $3\times-7=7\times-3$, кape ва съ zікъ $-21=-21$; іаp de se ва пȣne пpeцȣл $x=4$, ва fi: $11\times13=11\times13$, кape ва съ zікъ $143=143$, пpin ȣpmape tot deaȣna екȣаціа ва авеа indentitate.

§. 411. O екȣаціе пътpатъ amestекатъ $x^2+Px+Q=0$

se поate преfaче ꙟn кꙋpat пъtpatъ, daкъ se ва лꙋa $x=y-\frac{1}{2}P$, шi se ва пꙋпе прецꙋл aчesta ꙟn локꙋл пекꙋпоskꙋtei, фъкꙟnd adeкъ:

$x=y-\frac{1}{2}P$ ва fi $x^2=y^2-Py+\frac{1}{4}P^2$;

$Px=Py-\frac{1}{2}P^2$; de aчеа $x^2+Px+Q=y^2-\frac{1}{4}P^2+Q$;

шi fiind къ $x^2+Px+Q=0$, ва fi шi $y^2-\frac{1}{4}P^2+Q=0$;

dintp'aчeastъ екꙋацie ꙟnsъ гъsim, dꙋпъ §. 407.

$y^2=\frac{1}{4}P^2-Q$ шi $y=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}$; шi fiind

къ $x=y-\frac{1}{2}P$, ва fi $x=-\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)}$.

§. 412. Deadpentꙋл din екꙋацia $x^2+Px+Q=0$ se поate гъsi пекꙋпоskꙋta ꙟn кiпꙋл ꙋрmътор: съ se aшaze maĭ ꙟntꙟĭ кътimea кꙋпоskꙋtъ Q ꙟn пaptea a doъa a екꙋацieĭ, adeкъ $x^2+Px=-Q$, шi fiind къ пaptea ꙟntꙟĭ a aчeщiĭ екꙋацieĭ se поate faче ꙋn пътpat desъвꙟршit, daкъ i se ва adъога $\frac{1}{4}P^2$, кꙋчĭ $x^2+Px+\frac{1}{4}P^2=\left(x+\frac{1}{2}P\right)^2$, aшa съ se adaoџe aчea кътime ла amꙟndoъ пърцiле екꙋацieĭ, шi ва еши:

$x^2+Px+\frac{1}{4}P^2=\frac{1}{4}P^2-Q$, saꙋ skoвopꙟndꙋ-se din amꙟndoъ пърцiле ръdъчina пътpatъ:

$$x+\frac{P}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}, \text{ шi } x=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}$$

кape formꙋлъ esпpimъ препꙋл пекꙋпоskꙋteĭ ꙟn opiкape екꙋацie пътpatъ amestекatъ $x^2+Px+Q=0$.

§. 413. De ва fi $Q=\frac{P^2}{4}$, atȣнчї пentрȣ $\frac{P^2}{4}-Q=0$, ва fi ші $\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}=0$; прin ȣрmаре $x=-\frac{P}{2}$.

Dакъ ꙟn екȣацїа $x^2+Px+Q=0$ вom пȣne ꙟn лoкȣл лȣї Q прeцȣл $\frac{P^2}{4}$, вom авea:

$$x^2+Px+\frac{P^2}{4}=0, \text{ saȣ } \left(x+\frac{P}{2}\right)^2=0.$$

Kꙟnd ꙟnsъ ва fi $\left(x+\frac{P}{2}\right)^2=0$, atȣнчї ва tpe-бȣї sъ fie ші ръdъчina $x+\frac{P}{2}=0$ ші $x=-\frac{P}{2}$.

Екzemплȣ:

Sъ se рꙟndȣꙟaskъ екȣацїа

$\frac{1}{4x}+\frac{2}{3}=1-\frac{x}{9}$, ші ва fi $x^2-3x+\frac{9}{4}=0$; прin ȣрmаре $P=-3$, $Q=\frac{9}{4}$ ші $\frac{P^2}{4}-Q=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=0$; аша dap $x=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$.

§. 414. Ꙟn орї-каре алtъ ꙟntꙟmпларе некȣnoskȣta x ва авea tot deaȣna doъ прeцȣрї, къчї $\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}$ поate sъ fie ші пozitiв ші negatiв.

De se ва чере, s. п. a se desлегa екȣацїа $x^2+2x-17=0$, пȣne ꙟn formȣлa цeneрaлъ (§. 412.) $P=2$ ші $Q=-15$ ші веї авea:
$x^2=-\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left[\left(-\frac{2}{2}\right)^2+15\right]}=-1\pm\sqrt{16}$, saȣ $x=-1\pm4$, аша dap $x=3$ saȣ $x=-5$, ші

пѫindѫ-se fie-каре dintр'ачесте прецѫрї ѫn екѫаціа datъ ѫn локѫл nекѫnoskѫteї, ва еші $o=o$.

§. 415. Фiind къ пѫmeрiле P ші Q ѫn екѫаціа џеnералъ $x^2+Px+Q=o$ пot fi ші пozitiве ші nеratiве, sъ zічеm къ este:

1) Екѫаціа $x^2\pm Px-q=o$; dѫпъ §. 412. прецѫл nекѫnoskѫteї ва fi $x=\mp\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2+q\right)}$,

ші fiind къ $\frac{1}{4}P^2+q$ este o кътime пozitiвъ, ші

de ачееа $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^2+q\right)}$ tot dеаѫna o кътime пѫ-

tinчioaчъ, ѫрmеазъ ка nекѫnoskѫta x, кѫnd кътimеа чеа nекѫnoskѫtъ q ва fi nеratiвъ, sъ аiбъ doъ пѫtinчioase прецѫрї. Sъ zічеm къ este

2) Екѫаціа: $x^2\pm Px+q=o$; dѫпъ §. 412, прецѫл nекѫnoskѫteї ѫntр'ачеаstъ екѫаціе este

$x=\mp\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-q\right)}$.

Акѫm de ва fi $q>\frac{1}{2}P^2$, ші прin ѫрmаре

$\frac{1}{4}P^2-q=-\left(q-\frac{1}{4}P^2\right)$ o кътime nеratiвъ, екѫаціа

$\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-q\right)}=\sqrt{-\left(q-\frac{1}{4}P^2\right)}$ ва da o кътi-

me nепѫtinчioasъ. Аша dар кѫnd ѫn оpdinata екѫаціе пътраtъ еspреsia кѫnoskѫtъ q ва fi пozitiвъ, ші маї маре декѫt пътраtѫл жѫmътъціїї коnfъкъtорѫлѫї nекѫnoskѫteї x ла ѫntѫiа пѫtере, атѫnчї амѫndoъ прецѫрiле ачеціїї nекѫnoskѫte вор fi кътimї nепѫtinчioase.

Екzемпле:

I. Сь se afле x din екȣаціа $x^2+x-1=0$. Întр'ачеаstъ екȣаціе авем $P=1$, $Q=-1$, аша dар

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};$$

пріп ȣрмаре $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, saȣ $x=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

II. $x^2+13x+42=0$. $P=13$. $Q=42$

$$x=-\frac{13}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{13}{2}\right)^2-42\right)}$$

$$x=-\frac{13}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{169-168}{4}\right)}=-\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}};$$ аша

dар $x=-\frac{13}{2}+\frac{1}{2}=-6$, saȣ $x=-\frac{13}{2}-\frac{1}{2}=-7$.

III. $x^2-10x+13=0$. $P=-10$, $Q=13$

$$x=5\pm\sqrt{(25-13)}=5\pm\sqrt{12}=5\pm2\sqrt{3}.$$

IV. $x^2-12x+40=0$. $P=-12$, $Q=40$

$$x=6\pm\sqrt{(36-40)}=6\pm\sqrt{-4}=6\pm2\sqrt{-1}.$$

Аша dар нȣ este nічі ȣн преų пȣtinчіоs пentрȣ x, каре сь корьспȣнzь ла ачеаstь екȣаціе.

V. Din екȣаціа $\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{ax-b}{cx-d}=f$. вом авеа пріп

редȣчере $x^2-\frac{2(bc-ad)}{c^2f}x-\frac{d^2}{c^2}=0$.

Дȣпь ачеа пȣінd $P=-\frac{2(bc-ad)}{c^2f}$, ші $Q=-\frac{d^2}{c^2}$

ва еші дȣпе формȣла §. 412.

$$x=\frac{bc-ad\pm\sqrt{[(bc-ad)^2+c^2d^2f^2]}}{c^2f}.$$

VI. Екȣаціа $9bcx-6bdx^2=4adx-6acx$ ва da:

$x^2 - \left(\frac{9bc - 4ad}{6bd}\right)x - \frac{ac}{bd} = 0$, de unde va eшi

$$x = \frac{9bc - 4ad}{12bd} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{9bc - 4ad}{12bd}\right)^2 + \frac{ac}{bd}\right)}.$$

Pedукѫndу-se amѫndoĭ terminiĭ de sуб semnуʌ padiкaʌ ʌa aчeʌaш нуmitop, ва fi

$$x = \frac{9bc - 4ad}{12bd} \pm \sqrt{\left(\frac{81b^2c^2 + 72abcd + 16a^2d^2}{(12bd)^2}\right)},$$

ши din sуma ʌop sкoцѫndу-se pъdъчina, sé ва гъsi

$$x = \frac{9bc - 4ad \pm (9bc + 4ad)}{12bd}.$$

Aшa dap $x = \frac{18bc}{12bd} = \frac{3c}{2d}$ saŭ $x = \frac{-8ad}{12bd} = -\frac{2a}{3b}$.

De eкуaцiiʌe, ѫn кape нeкуnosкуta este ipaцionaʌъ.

§. 416. Daкъ ѫn eкуaцia чe se чepe a se desʌega, neкуnosкуta ва aвea ѫnaintea eĭ вpe уn semnŭ padiкaʌ, тpeбуe maĭ ѫntѫĭ sъ se facъ eкуaцia paцionaʌъ, ши daкъ eкуaцia чe ва pezуʌta dуne aчea ва fi o eкуaцie de гpadуʌ aʌ doiʌea, aтунчĭ din desʌegapea aчeшiĭ din уpmъ eкуaцiĭ вop eшi doъ npeцуpĭ. Anoĭ de тpeбуe a se ʌуa ѫn eкуaцia datъ pъdъчina neкуnosкуteĭ ку semnуʌ nozitiв saŭ negatiв, aчeasta se ва гъsi din чepчetapea чe se ва faчe a se afʌa, ку кape semn pъdъчina din npeцуpiʌe neкуnosкуteĭ noate sъ ѫmnʌineaskъ kondiцiiʌe npoбʌemeĭ, ши sъ pъsnуnzъ ʌa eкуaцia datъ.

Eкzemnʌe:

I. Se чepe npeцуʌ ʌуĭ x din eкуaцia $5x = 16 + 2\sqrt{x}$.
Aчeastъ eкуaцie fъкѫndу-se paцionaʌъ (§. 400.)

ва da: $x^2 - \frac{164}{25}x + \frac{256}{25} = 0$, din каре ва еші $x = \frac{82 \pm 18}{25}$; аша dар $x = 4$ saŭ $x = \frac{64}{25}$.

Акꙋm fiind къ поате съ fie $\sqrt{x} = \pm 2$ saŭ $\sqrt{x} = \pm \frac{8}{5}$, черчетꙟndꙋ-se a se afла каре прецꙋрї sꙟnt пꙋtinчioase пentpꙋ екꙋаціa datъ, se ва гъsi, ла ꙟntꙟia ꙟntꙟmпларea, $x = 4$ ші $\sqrt{x} = 2$; ла a doъa ꙟntꙟmпларе, $x = \frac{64}{25}$ ші $\sqrt{x} = -\frac{8}{5}$.

II. De se ва faче раціonaлъ екꙋаціa $5x = 16 - 2\sqrt{x}$, se ва гъsi tокmaї ачеeaшї екꙋаціe de градꙋл ал doїлea, ка ꙟn екzemплꙋл de maї sꙋs; de ачеea ші прецꙋріле лꙋї x вор fi ачелеaш; потрівірea ꙟnsъ a прецꙋрілор ръdъчinei пе kondiціiле проблеmeї ва fi, ла ꙟntꙟia ꙟntꙟmпларе, $x = 4$ ші $\sqrt{x} = -2$, ла a doъa ꙟntꙟmпларе $x = \frac{64}{25}$ ші $\sqrt{x} = \frac{8}{5}$.

III. De обще: екꙋаціa $ax = b \pm c\sqrt{x}$ dъ:

$$x^2 - \left(\frac{2ab + c^2}{a^2}\right)x + \frac{b^2}{a^2} = 0.$$ Dintр'ачеasta ꙗсъ

$$x = \frac{2ab + c^2 \pm c\sqrt{(4ab + c^2)}}{2a^2}.$$

IV. Съ se рꙟdiче ла пътрат екꙋаціa

$\sqrt{(7 + x)} + \sqrt{(2 + x)} = \sqrt{(5 - 2x)}$ ші ва fi

$\sqrt{(14 + 9x + x^2)} = -2 - 2x$; ачеasтъ екꙋаціe fъкꙟndꙋ-se ꙗаръш раціonaлъ dъ

$x^2 - \frac{x}{3} - \frac{10}{3} = 0$; dintр'ачеasta ꙗсъ $x = \frac{1 \pm 11}{6}$

аша dар орї este $x = 2$ saŭ $x = -\frac{5}{3}$.

Пȣindȣ-se aчeste прецȣрї пentpȣ x ɤn екȣація $\sqrt{(7+x)}+\sqrt{(2+x)}=\sqrt{(5-2x)}$, ва еші

ɤntɤї, пentpȣ $x=2$ екȣація ȣрmътoape

$\sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{1}$, ші ка съ fie ачeastъ екȣаціе adeвъратъ, прецȣріле ръdъчinei tребȣe съ fie $3-2=1$ saȣ̆ $-3+2=-1$.

a л doїлea пentpȣ $x=-\frac{5}{3}$ ва fi

$$\sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{35}{3}};$$

прin ȣрmаре прецȣріле ръdъчiнiлор вор еші

$$\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}};\ \text{saȣ̆}\ -\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

V. Съ se гъsească прецȣл лȣї x din екȣація

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{(a-bx)}}{\sqrt{a}-\sqrt{(a-bx)}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{(a-bx)}}{\sqrt{a}+\sqrt{(a-bx)}}=m.$$

Maї ɤntɤї съ se редȣкъ fpɤnцеріле ла ачелаш пȣmitop. Ачeastъ редȣчере ва da $\frac{4\sqrt{(a^2-abx}}{bx}=m$.

Рɤdікɤndȣ-se екȣація ачeasta ла пътpat ші рɤndȣindȣ-se tepminiї, ва еші $x^2+\frac{16ax}{bm^2}-\frac{16a^2}{b^2m^2}=0$;

прin ȣрmаре $x=\frac{4a}{bm^2}\left(-2\pm\sqrt{(4+m^2)}\right)$

§. 417. Dакъ ɤntр'о екȣаціе пътратъ $x^2+Px+Q=0$ кътimiле кȣnoskȣte P ші Q вор fi пȣmepe ірацiонале, ачeastъ екȣаціе se ва пȣtea deslera іаръш прin formȣла de ла §. 412.

Фie екȣація $x^2-2x\sqrt{3}+2\sqrt{2}=0$. Aічї este $P=-2\sqrt{3}$, $Q=2\sqrt{2}$; аша ва еші $x=\sqrt{3}\pm\sqrt{(3-2\sqrt{2})}$.

Aкȣm fiinđ къ este $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$, ва требхі съ fie ші $\sqrt{(3-2\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$; пріn хрмаре $x=\sqrt{3}\pm(\sqrt{2}-1)$. Аша dар вом авеа пеntрх некхnoskхta x ѫn екхаціа datъ $x^2-2x\sqrt{3}+2\sqrt{2}=0$, хрmътоареле doъ прецхрї $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$, saх $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$.

Фiind къ ла desлегарєа хnор asemenєа екхацiї tot dєаxna se ivesk ръdъчinї каре ѫnt a se skoate din вinomхрї de fорма ачєаsta: $A\pm\sqrt{B}$, тревхе акхm съ se apate кхm se пот skoate asemenєа ръdъчinї.

De прецхл кътimeї $\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}$.

§. 418. Съ zічеm къ $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ este ръdъчina пътратъ din вinomхл $A\pm\sqrt{B}$, saх $\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$; аша dар $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=A\pm\sqrt{B}$, каре ва съ zікъ $a+b\pm2\sqrt{ab}=A\pm\sqrt{B}$.

Dinтр'ачєаstъ екхаціе хрmєазъ къ ші кътimiле рацioнале $a+b$ ші A ѫn amѫndoъ пърціле екхаціеї, прекхm ші челе ірацioнале $2\sqrt{ab}$ ші $\sqrt{B}$ ѫnt deопотрівъ ѫntре еле, аdекъ $a+b=A$ ші $2\sqrt{ab}=\sqrt{B}$. De вом рѫdіка екхаціа чєа din хрmъ ла пътрат, вом авєа: $4ab=B$ ші $b=\frac{B}{4a}$. Пxindх-se ачest прец ѫn локхл лхї B ѫn екхаціа $a+b=A$, ва fi, $a+\frac{B}{4a}=A$, saх $a^2-Aa+\frac{B}{4}=0$; пріn хрmаe dхпе §. 412,

$$a=\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}.$$

Пeнтрх прескхртаре съ лхъm despре о парте $\sqrt{(A^2-B)}=C$, ші ва fi, $a=\frac{A+C}{2}$.

XXXIII.

Desпpe aʌtъ пapte aвem $a+b=A$; de ȣnde $b=A-a$; aшa dap de вom пȣne ꙟntp'aчeastъ din ȣpmъ eкȣaцie пpeцȣʌ afʌat aʌ ʌȣĭ a, вa fi:

$$b=A-\frac{A+C}{2}=\frac{A-C}{2};\ \text{пpin ȣpmape}\ \sqrt{a}=\sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)},$$

ши $\sqrt{b}=\sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)}$, ши de aчeвa $\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}=$

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)},\ \text{ȣnde}$$

$C=\sqrt{(a^2-B)}$.

Eкzemпʌe:

I. Sъ se sкoaцъ pъdъчina пъtpatъ din вinomȣʌ $59-30\sqrt{2}$.

Aiчĭ ꙟntpeвȣinцꙟndȣ-se fopmȣʌa de maĭ sȣs, вa fi $A=59$; $\sqrt{B}=30\sqrt{2}$; $A^2=3481$; $B=900\times2=1800$; пpin ȣpmape $C=\sqrt{(3481-1800)}=\sqrt{1681}=41$,

ши $\sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{59+41}{2}\right)}=\sqrt{50}=\pm5\sqrt{2}$

$$\sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{59-41}{2}\right)}=\sqrt{9}=\pm3.$$

Aшa dap este $\sqrt{(59-30\sqrt{2})}=\pm5\sqrt{2}\mp3$.

II. Sъ se гъseasкъ пpeцȣʌ ʌȣĭ $y=\sqrt{(20\frac{3}{4}+3\sqrt{35})}$.

Aiчĭ este $A=20\frac{3}{4}$; $\sqrt{B}=3\sqrt{35}$; $A^2=\frac{6889}{16}$;

$B=315$; aшa dap $C=\sqrt{\left(\frac{6889}{16}-315\right)}$

$=\sqrt{\frac{1849}{16}}=\frac{43}{4}$, ши

$$\sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{83+43}{8}\right)}=\sqrt{\frac{63}{4}}=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2};$$

$$\sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{83-43}{8}\right)}=\sqrt{\frac{40}{8}}=\pm\sqrt{5};$$

прin үрмаре $y=\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}\pm\sqrt{5}$.

III. Se чере прецүл лүї $y=\sqrt{[x+2\sqrt{(x-1)}]}$.
Aiчї este $A=x$; $\sqrt{B}=2\sqrt{(x-1)}$, шi
$C=\sqrt{(x^2-4x+4)}=x-2$, аша dар.

$$\sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{2x-2}{2}\right)}=\pm\sqrt{(x-2)}, \text{ шi}$$

$$\sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{x-x+2}{2}\right)}=\sqrt{1}=\pm 1;$$

прin үрмаре $y=\pm 1\mp\sqrt{(x-1)}$.

IV. Съ se афле $y=\sqrt{[3-\sqrt{(9-4x^2)}]}$.
Aiчї este $A=3$, $\sqrt{B}=\sqrt{(9-4x^2)}$; $A^2=9$;
$B=9-4x^2$; аша dар $C=\sqrt{(9-9+4x^2)}=2x$,
шi $\sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3+2x}{2}\right)}$;

$\sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{3-2x}{2}\right)}$; прin үрмаре

$$y=\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}+x\right)}\mp\sqrt{\left(\frac{3}{2}-x\right)}.$$

V. Фie $y=\sqrt{(m\sqrt{-1})}$; aiчї este $A=0$;
$\sqrt{B}=m\sqrt{-1}$, аша dар $C=\sqrt{(0+m^2)}=m$, шi

$$y=\sqrt{\left(\frac{0+m}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{0-m}{2}\right)}=\sqrt{\frac{m}{2}}+\sqrt{-\frac{m}{2}}$$

saў $y=(1+\sqrt{-1})\sqrt{\frac{m}{2}}$.

§. 419. Кind A^2-B, dела §. 418, нү ва fi пътрат desъвiршit, шi прin үрмаре $C=\sqrt{(A^2-B)}$ ва fi ꙋn нꙋмър ipaцional, se ва пꙋtea шi atꙋnчĭ съ se ѕкоацъ ръdъчina din binomꙋл $A\pm\sqrt{B}$, dꙋпe formꙋла параграфꙋлꙋĭ 418; dap кꙋ toate ачестea esпresia $\sqrt{(A\pm\sqrt{B})}$ se ѕокотеще a fi чea maĭ ѕкꙋртъ. Аша spre пildъ binomꙋл $3+\sqrt{2}$ ва da кътimea $C=\sqrt{7}$; прin ꙋрmare ва fi:

$$\sqrt{(3+\sqrt{2})}=\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)}.$$

§. 420. Кînd amîndoъ кътimile A шi $\sqrt{B}$ ale binomꙋлꙋĭ dat вор авеа ꙋn фъкътор комꙋн ipaцional, atꙋnчĭ maĭ bine este dakъ binomꙋл se ва desfaче în doĭ фъкъторĭ, din каре ꙋnꙋл съ fie фъкъторꙋл чел ipaцional, шi dꙋпe ачеа съ se ѕкоацъ ръdъчina din fie каре фъкътор deosebit. s. п.,

$5\sqrt{2}+4\sqrt{3}=(5+2\sqrt{6})\sqrt{2}$; аша dap

$\sqrt{(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})}=\sqrt{(5+2\sqrt{6})}\times\sqrt[4]{2}$. Dap dꙋпe §. 418. авеm $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$; прin ꙋрmare

$\sqrt{(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{18}$.

Asemenea se гъseще, $\sqrt{(19\sqrt{3}-6\sqrt{6})}=3\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}$.

§. 421. Фie m шi n doъ нꙋмере nenotpivite, акърора diferenцъ este $m-n$. Ачeastъ diferenцъ рidiкîndꙋ-se ла пътрат ва da $(m-n)^2=m^2+n^2-2mn$. Dap fiind къ niчĭ ꙋn пътрат нꙋ поate fi negativ, аша $(m-n)^2$ тревꙋе съ fie nozitiв; de ачеа шi diferenцa între m^2+n^2 шi $2mn$ тревꙋе съ fie nozitiвъ; прin ꙋрmare ва fi $m^2+n^2>2mn$.

Аша dap sꙋma пътрателор a doъ нꙋмере nenotpivite este tot dеаꙋna maĭ маре, de кît продꙋктꙋл îndoit ал ачелораш нꙋмере. În binomꙋл че s'a лꙋat ла §. 418. пentpȣ desволtapѣa fopmȣлeĭ аколо аръtate, A este sȣma пъtpateлop amɪndȣpopa пъpцiлop ръdъчinei, шi $\sqrt{B}$ пpodȣktȣл ɪndoit ал лop. Аша кɪnd $A\pm\sqrt{B}$ ва fi съ fie ɪntp'adeвъp пъtpatȣл вpe ȣneĭ ръdъчinĭ, atȣnчĭ ва tpeвȣi съ fie negpeшit $A>\sqrt{B}$, шi $A^2>B$; пpin ȣpmape $C=\sqrt{(A^2-B)}$ ва fi tot dѣaȣna o кътime пȣtinчioasъ.

Пе лɪngъ ачѣasta fiind къ пъtpateлe кътimiлop пȣtinчioase пȣ пot fi пȣmepe negatiве, tpeвȣe шi кътimѣa A, ка ȣna че este sȣma a doъ пъtpate, съ fie пozitiвъ. Аша dap fopmȣлa че s'a demonstpat ла §. 418. se пoate апліка ла opĭ кape вinom $A+\sqrt{B}$, a кърȣia naptѣa чѣa dɪntɪĭ A este ȣn пȣmъp пozitiв, шi maĭ mape dekɪt $\sqrt{B}$.

Dap fiindкъ tot se ɪntɪmплъ ȣneopĭ de a se пȣtѣa skoate ръdъчina пъtpatъ din вinomȣpĭ кape съ fie de fopmȣлa $A\pm\sqrt{B}$, шi ɪn кape съ пȣ se afлe ачeлe kondiцiĭ, вom аpъta aiчĭ кȣm tpeвȣe съ ȣpmъm ла skoatepѣa ръdъчinei din asemenѣa вinomȣpĭ.

§. 422. Кɪnd ва fi $\sqrt{B}>A$, atȣnчĭ A^2-B ва fi ȣn пȣmъp negatiв, шi $\sqrt{(A^2-B)}=C$ o кътime nenȣtinчioasъ. Ла ачѣastъ ɪntɪmплape fopmȣлa de ла §. 418. ва da ȣn пpeц nenȣtinчios atɪt пentpȣ $\sqrt{(A-\sqrt{B})}$ кɪt шi пentpȣ $\sqrt{(A+\sqrt{B})}$. Ръdъчina чѣa din tɪĭ $\sqrt{(A-\sqrt{B})}$, tpeвȣe ɪn adeвъp съ fie o кътime nenȣtinчioasъ, пentpȣ къ $A-\sqrt{B}$, dȣпъ sȣпoziцie este o кътime negatiвъ; ѩp пentpȣ $\sqrt{(A+\sqrt{B})}$ tpeвȣe съ fie doъ пpeцȣpĭ пȣtinчioase, пentpȣ къ $A+\sqrt{B}$ este o кътime пozitiвъ. Кȣm ɪnsъ se пoate face ла ачѣastъ dȣпe ȣpmъ ɪmпpeжȣpape ка кътimѣa C, пentpȣ fopmȣлa §. 418, съ пȣ fie nenȣtinчioasъ, se ва вedѣa din eksemплeлe ȣpmъtoape.

I. Sъ se кaȣte прецȣʌ рѣdъчinei $y=\sqrt{(24+17\sqrt{2})}$.
De se вa пȣne $A=24$; $\sqrt{B}=17\sqrt{2}$, вa fi $C=\sqrt{-2}$.
Sъ se desfaкъ вinomȣʌ ꙟn doĭ fъкъtopĭ, din кape ȣпȣʌ sъ fie $\sqrt{2}$: adeкъ $24+17\sqrt{2}=(17+12\sqrt{2})\sqrt{2}$

шi вa fi $y=\sqrt{(17+12\sqrt{2})}\times\sqrt[4]{2}$.
Aкȣm sъ se пȣe $A=17$, $\sqrt{B}=12\sqrt{2}$, шi dȣпe fopmȣʌa §. 418. se вa гъsi $\sqrt{(17+12\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$,

aшa dap $y=(3+2\sqrt{2})\sqrt[4]{2}=3\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{8}$.

II. Asemenea, fiind къ este $60+49\sqrt{5}=(49+12\sqrt{5})\sqrt{5}$.

вa fi шi $\sqrt{(60+49\sqrt{5})}=\sqrt{(49+12\sqrt{5})}\times\sqrt[4]{5}$.
Dap dȣпe §. 418. $\sqrt{(49+12\sqrt{5})}=2+3\sqrt{5}$;

aшa dap $\sqrt{(60+49\sqrt{5})}=(2+3\sqrt{5})\times\sqrt[4]{5}=$

$$=2\sqrt[4]{5}+3\sqrt[4]{125}.$$

III. Sъ se scoaцъ рѣdъчina din вinomȣʌ $1+\sqrt{2}$.

Фiind къ este $1+\sqrt{2}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}$, вa fi шi

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\times\sqrt[4]{2}.$$

Sъ пȣnem aкȣm ꙟn fopmȣʌa § 418. $A=1$,

$\sqrt{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, шi вom aвea,

$$C=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$ шi

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}\right).$$ Пpin ȣpmape

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}.$$

§. 423. De ва fi съ se каȣte ръdъчina бinomȣлȣї $\sqrt{B}-A$ прin fopmȣла dела §. 418, se ва гъsi пentpȣ ачеаstъ ръdъчinъ tot dеаȣna ȣn прец пепȣtinчios, пentpȣ къ este

$$\sqrt{(\sqrt{B}-A)}=\sqrt{\left(\frac{-A+C}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{-A-C}{2}\right)}.$$

Dap ръdъчina черȣtъ пȣmaї atȣnчї ва fi o кътime пепȣtinчioasъ, кѫnd ва fi $A>\sqrt{B}$, шi прin ȣpmape кѫnd $\sqrt{B}-A$ ва da ȣn пȣмър пeгатiв. Iap de ва fi $\sqrt{B}>A$, шi прin ȣpmape $\sqrt{B}-A$ o кътime пozitiвъ, ва tpeбȣi ка шi ръdъчina din $\sqrt{B}-A$ съ аїбъ doъ прецȣpї пȣtinчioase, каpe se пot гъsi прintp'ачеаш лȣкpape, прекȣm s'a аpъtat ла desлегapеа пpoблemелор dела параграfеле de maї 'nainte.

Екzemплe:

I. Съ se skoaцъ ръdъчina din $7\sqrt{3}-12$, шi fiind къ este $7\sqrt{3}-12=(7-4\sqrt{3})\sqrt{3}$, ва fi
$\sqrt{(7\sqrt{3}-12)}=\sqrt{(7-4\sqrt{3})}\times\sqrt[4]{3}$. Dap dȣпе §. 418. авеm $\sqrt{(7-4\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$; аша dap
$\sqrt{(7\sqrt{3}-12)}=(2-\sqrt{3})\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}$.

II. Врѫnd съ skoatem ръdъчina din $\sqrt{5}-1$, пȣnem

$$\sqrt{5}-1=\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5};$$

аша dap $\sqrt{(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}\times\sqrt[4]{5}$.

Акȣm, dȣпъ fopmȣла §. 418. авеm $A=1$; $\sqrt{B}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, шi

$C=\sqrt{\left(1-\frac{1}{5}\right)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; прin ȣрmаре:

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}\right)}=$$

$$\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)\times\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)}-\sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\right)-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)}\right).$$

Ачеastъ ръdъчinъ ꙟmmȣлцindȣ-se кȣ $\sqrt[4]{5}$, ва ешi

$$\sqrt{(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)}.$$

De fъкъtopiĭ tpinomȣлȣĭ Ax^2+Bx+C.

§. 424. Прецȣріле кътimeĭ чеĭ некȣnoskȣte, каре ръsпȣnd ла kondiцiiле проблеmeĭ saȣ але екȣацieĭ, se нȣmesk **ръdъчiniле екȣацieĭ**. Asfeл нȣmepiле 2 шi 7 sꙟnt ръdъчiniле екȣацieĭ $x^2-9x+14=0$, пentpȣ къ amꙟndoъ пȣindȣ-se ꙟn екȣацie ꙟn локȣл лȣĭ x, daȣ $0=0$.

§. 425. Фie a шi b ръdъчiniле екȣацieĭ пътpate $x^2+Px+Q=0$. Ꙟmmȣлцind fъкъtopiĭ $x-a$ шi $x-b$ ꙟntpe eĭ, вom авеа:

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab.$$

Dакъ ачеst продȣкt ва fi sъ se fакъ $=0$, ачеasta нȣmaĭ atȣнчĭ ва fi кȣ пȣtinцъ, кꙟnd ва fi $x=a$, saȣ $x=b$; къчĭ ла ꙟntꙟia ꙟntꙟmпларе ва fi fъкъtopȣл $x-a=a-a=0$, iар ꙟn a doъa ꙟntꙟmпларе ва fi fъкъtopȣл $x-b=b-b=0$. Кꙟnd ꙟnsъ a шi b вор fi dȣпъ sȣпoziцie, ръdъчiniле екȣацieĭ $x^2+Px+Q=0$, atȣнчĭ тpeбȣe, dȣпe §. 412, sъ fie

$$a = -\frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)} \text{ шi}$$

$$b = -\frac{P}{2} - \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$$

Ачеstea adȣnɪndȣ-se вор da $a+b = -\frac{2P}{2} = -P$

saȣ $P = -(a+b)$; fiind къ терminiĭ каре аȣ semnȣл радiкал se шерг ȣнȣл пе алтȣл.

Іар de вом ɪmmȣлці ачелеаш ръdъчinĭ ɪntpe еле, вом авеа $ab = \frac{P^2}{4} - \left(\frac{P^2}{4} - Q\right) = Q$, пентрȣ къ sȣma a доъ кътiniĭ, ɪmmȣлціtъ кȣ difepenца лор, dъ difepenца пътрателор ачелораш кътimĭ. Акȣm pedȣкɪndȣ-se терminiĭ ва еші $ab = Q$, ші sȣвstitȣind прецȣріле $P = -(a+b)$ ші $Q = ab$ ɪn екȣація

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$, вом авеа

$(x-a)(x-b) = x^2 + Px + Q$. Dintр 'ачеаsta ȣрmeazъ:

1) Фie каре екȣаціе de ал doĭлеа град ordinatъ de форmа $x^2 + Px + Q = 0$, але кърia ръdъчinĭ sɪnt a ші b, se поате приві ка продȣкт din doĭ фъкъторĭ $x-a$ ші $x-b$.

2) Кoнфъкъторȣл P din терminȣл ал doĭлеа ал ачелiаш екȣаціеĭ este tot dеаȣna sȣma amɪndȣрора ръdъчinілор кȣ semнеле skimвate, saȣ $P = -(a+b)$.

3) Ал треiлеа термin saȣ кътimea кȣnoskȣtъ Q, este tot dеаȣna продȣктȣл din amɪndoъ ръdъчiніле кȣ але лор saȣ кȣ skimвate semne, adeкъ $Q = a.b = -a \times -b = ab$.

Sпре пiлdъ. Ɪn Екȣація $x^2 - 9x + 14 = 0$, але кърia ръdъчinї sɨnt 2 шi 7, коnfькъtорꙋл — 9 este de o пotpiвъ кꙋ — 2 — 7; шi tерminꙋл ал tреїлеа 14 de o пotpiвъ кꙋ — 2 × — 7. Іар екꙋaцia ɨnsъш este продꙋкtꙋл din $(x - 2)\,(x - 7)$.

§. 426. 1) Sъ ziчem къ amɨndoъ ръdъчiniлe але ꙋnеї екꙋaцiї de градꙋл ал доїлеа аў semne de o потрiвъ, шi къ ачеstеа sɨnt $+a$ шi $+b$, saў $-a$ шi $-b$. Atꙋnчї ва fi ла ɨntɨia ɨntɨmпларе:

$$(x - a)\,(x - b) = x^2 - (a + b)\,x + ab = 0;$$

ла а доъа ɨntɨmпларе:

$$(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab = 0.$$

Аша dap ла amɨndoъ ɨntɨmплъpiлe ал tреїлеа tepmin ab ва fi пozitiв; iap tepminꙋл ал доїлеа ва fi орї neгatiв, saў пozitiв, dꙋпъ кꙋm вор fi шi ръdъчiniлe пozitiве saў neгatiве. De вom sокоti amɨndoъ ръdъчiniлe de о потрiвъ ɨntpe еле, вom авеа ла ɨntɨia ɨntɨmпларе,

$$(x - a)\,(x - b) = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 = 0;$$

шi ла а доъа ɨntɨmпларе,

$$(a + x)\,(x + b) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = 0.$$

2) Sъ ziчem акꙋm къ ръdъчiniлe аў semne ɨmпotiвitoape, шi къ ачеstеа sɨnt $+a$ шi $-b$.
Ла ачеаstъ ɨntɨmпларе ва fi
орї $(x - a)\,(x + b) = x^2 - (a - b)\,x - ab = 0$,
saў $(x - a)\,(x + b) = x^2 + (b - a)\,x - ab = 0$.

Аша dap ла amɨndoъ ɨntɨmплъpiлe ал tреїлеа tepmin ab ва fi neгatiв; dap ал доїлеа tepmin ва fi neгatiв, dакъ ръdъчina пozitiвъ $+a$ ва fi maї mape de кɨt neгatiва $-b$; ла ɨntɨmпларе din пpotiвъ ал доїлеа tepmin ва fi пozitiв.

Кɨnd ръdъчiniле вор авеа ɨntp'ачелаш време semпе ꙟпротiвiтоаре шi пꙋтере de о потрiвъ, атꙋнчĭ ва fi sꙋма лор, шi прiн ꙋрмаре шi конфiкꙗторꙋл din партеа а доꙋа а екꙋацiеĭ de о потрiвъ кꙋ пꙋла; аша dар лiпseще din екꙋацiе терминꙋл ал doiлеа saꙋ пꙋтереа ꙟнтiĭ а некꙋnoskꙋтеĭ, прекꙋм ла екꙋацiа ꙋрмътоаре:

$$(x-a)\,(x+a)=x^2-a^2=0.$$

§. 427. Дакъ амꙟndoъ ръdъчiniле екꙋацiеĭ $x^2+Px+Q=0$ вор fi рацiонале, ва fi шi P шi Q нꙋмере рацiонале. Dар din потiвъ нꙋ se поате ꙟнкеiа, къ adiкъ екꙋацiа ар авеа ръdъчiнĭ рацiонале, кꙟnd P шi Q вор fi нꙋмере рацiонале, пentрꙋ къ шi sꙋма, шi продꙋктꙋл нꙋмерiлор iрацiоналĭ поате sъ fie ꙋн нꙋмър рацiонал. Sъ ziчем dар къ ръdъчiniле a шi b але екꙋацiеĭ $x^2+Px+Q=0$ sꙟnt рацiонале, шi fiind къ este $Q=ab$, ачеste ръdъчiнĭ требꙋе sъ fie ꙟмпърцiторĭ saꙋ фъкъторĭ аĭ нꙋмърꙋлꙋĭ Q. Sъ se каꙋте dар, dꙋпе §. 119, тоцĭ ꙟмпърцiторiĭ нꙋмърꙋлꙋĭ Q, шi sъ se черче каре dinтрꙟншiĭ ръспꙋnd ла кondiцiiле екꙋацiеĭ; ачешtiа вор fi атꙋнчĭ ръdъчiniле черꙋte. Din §. 426. se поате кꙋnoaще кꙋ каре semne требꙋе sъ se iа ꙟмпърцiторiĭ ла ачеаstъ черкаре. S. п. Ꙟn екꙋацiа $x^2+x-30=0$, кътimеа кꙋnoskꙋтъ 30 se поате ꙟмпърцi кꙋ нꙋмерiĭ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Din тоцĭ ачешtĭ ꙟмпърцiторĭ нꙋмаĭ $+5$ шi -6 ꙟмплiнesk кondiцiiле проблемеĭ, ачешtеа sꙟnt dар ръdъчiniле екꙋацiеĭ пропꙋse. Кꙟnd ꙟнtре ꙟмпърцiторiĭ нꙋмърꙋлꙋĭ кꙋnoskꙋt Q нꙋ se вор гъsi нiчĭ ꙋнꙋ каре sъ ръспꙋnzъ ла кondiцiiле екꙋацiеĭ, атꙋнчĭ ръdъчiniле лор вор fi iрацiонале.

§. 428. Акꙋм dакъ ꙟн екꙋацiа $x^2+Px+Q=0$ ръdъчiniле a шi b вор fi iрацiонале, de шi P шi Q

вор fi нȣмерї раціоналї, ачесте ръdъчінї требȣе съ аїбъ ȣрмътоареа формъ:
$a=p+\sqrt{q}$ ші $b=p-\sqrt{q}$; пентрȣ къ орї кȣм ꙟнтр'алт кіп нȣ ар fi кȣ пȣтінцъ ка ші сȣма лор P ші продȣктȣл лор Q съ fie ȣн нȣмър раціонал. Іар форма арътатъ не ва da:
$P=-(a+b)=-(p+\sqrt{q})-(p-\sqrt{q})=-2p$. ші $Q=(p+\sqrt{p})\,(p-\sqrt{q})=p^2-q$; аша dар амꙟndoъ кътіміле сꙟnt раціонале.

S. п. Dȣпе §. 412. екꙋаціа $x^2-6x+1=0$ аре ръdъчініле $3+2\sqrt{2}$ ші $3-2\sqrt{2}$, а кърора сȣмъ este $=6$, ші ал кърора продȣкт este deопотрівъ кȣ $9-8=1$.

§. 429. Dакъ ꙟн екꙋаціа $x^2+Px+Q=0$ ва fi $Q>\frac{P^2}{4}$, ръdъчініле se вор гъсі къ аꙋ ніще прецȣрї непȣтінчіоасе; ші аша фъкъторіі раdікалї аї екȣаціеї вор fi ніще нȣмерї імаџінарї.

Екzемпле.

I. $x^2+4=0$, ȣnde este $P=0$, не dъ $x=\pm\sqrt{-4}=\pm2\sqrt{-1}$, ші $x^2+4=(x-2\sqrt{-1})(x+2\sqrt{-1})$. De обще $x^2+e=0$ не dъ $x=\pm\sqrt{-e}$; екȣаціа dар копрinde фъкъторіі раdікалї $(x-\sqrt{-e})$ ші $(x+\sqrt{-e})$.

II. Din екꙋаціа $x^2-2x+2=0$ se гъсеще, dȣпе §. 412, $x=1\pm\sqrt{-1}$; прін ȣрмаре $x^2-2x+2=(x-1-\sqrt{-1})\,(x-1+\sqrt{-1})$. Afаръ de ачеаста ръdъчініле se пот гъсі ші ла ачеастъ ꙟнтꙟмпларе ꙟн форма $p+\sqrt{q}$ ші $p-\sqrt{q}$, пентрȣ къ ꙟнтр'алт кіп P ші Q н'ар пȣтеа fi раціоналї.

§. 430. De se ва чере а se desfаче кътімеа комплексъ Ax^2+Bx+C ꙟn фъкъторiĭ eĭ, se ва прiвi ачeastъ кътime ка o екꙋацie de градꙋл ал doĭлea, se ва sокоti de o потрiвъ кꙋ o, шi se ва ꙟmпърцi екꙋацia кꙋ A, de ꙋnde ва eшi $x^2+\frac{Bx}{A}+\frac{C}{A}=0$. Ачeastъ екꙋацie ва da $x=\frac{-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)}}{2A}$ saꙋ, dакъ пentpꙋ пpeскꙋptape se ва пꙋne $D=\pm\sqrt{(B^2-4AC)}$, ва fi $x=\frac{-B\pm D}{2A}$. Din ръдъчiniле афлate se формeазъ фъкъторiĭ радiкалi, $x+\frac{B-D}{2A}$ шi $x+\frac{B+D}{2A}$, шi ва fi: $x^2+\frac{Bx}{A}+\frac{C}{A}=\left(x+\frac{B-D}{2A}\right)\left(x+\frac{B+D}{2A}\right)$.

Акꙋm fiind къ este $A=\sqrt{A}\times\sqrt{A}$, sъ se ꙟmmнꙋлцeaskъ партea чea din тꙟĭ a екꙋацieĭ кꙋ A, шi fieш каре din amꙟndoĭ фъкъторiĭ пърцiĭ a doua кꙋ $\sqrt{A}$, шi ва eшi:

$$Ax^2+Bx+C=\left(x\sqrt{A}+\frac{B-D}{2\sqrt{A}}\right)\left(2\sqrt{A}+\frac{B+D}{2\sqrt{B}}\right).$$

Екzemпле.

I. Съ se desfакъ кътimea $3x^2+4x-1$ ꙟn фъкъторiĭ eĭ. Ръдъчiniле екꙋацieĭ $x^2+\frac{4x}{3}-\frac{1}{3}=0$ sꙟnt

$x=-\frac{\sqrt{7}+2}{3}$ saꙋ $x=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$; прiп ꙋрmape

$$x^2=\frac{4x}{3}-\frac{1}{3}=\left(x+\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{7}-2}{3}\right) \text{ шi}$$

$$3x^2+4x-1=\left(x\sqrt{3}+\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{3}}\right)\left(x\sqrt{3}-\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}}\right).$$

II. Sъ se kaxte fъkъtorії kъtimeї $10x^2 - 29x - 21$.

Ръдъчініле екѕацієї $x^2 - \frac{29x}{10} - \frac{21}{10} = 0$ sînt:

$x = \frac{7}{2}$ saѕ $x = -\frac{3}{5}$; пріn ѕрmаре

$$x^2 - \frac{29x}{10} - \frac{21}{10} = \left(x + \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{7}{2}\right).$$

Фiind къ este $10 = 5 \times 2$, înmѕлціnd пaptea чеа din тîї а ачещії екѕації кѕ 10, fъкъторѕл чел din тîї ал пърції а доъа кѕ 5, шi fъкъторѕл ал доїлеа кѕ 2 вом авеа:

$$10x^2 - 29x - 21 = (5x + 3)(2x - 7).$$

§. 431. Теоріа чеа маї пе деплін пентрѕ десле-гареа екѕаціілор de градѕрї маї înалте fаче парте din matematika sѕблimъ. Кѕ toate ачестеа sînt оаре-каре întîmплърї, în каре деслегареа ѕнеї екѕа-ції de град маї înалт se поате fаче шi пріп регѕліле че s'аѕ арътат пînъ аічї.

§. 432. Екѕаціе кѕратъ de град маї 'налт se zi-че ачеа, în каре, дѕпе че se ашазъ тоції терминії ла рîндѕл лор, se афлъ нѕмаї ѕна, dap înалтъ пѕте-ре а некѕnoskѕteї. De ачеа формѕла ценералъ а ѕ-неї asemenea екѕації este $x^m = Q$, în каре Q înfъці-шеазъ нѕмаї кътимї кѕnoskѕte. Прецѕл некѕnoskѕteї dintp'о asemenea екѕаціе se гъсеще, dакъ se ва skoate ръдъчина m din амîndoъ пърціле екѕацієї; ва fi адекъ $x = \sqrt[m]{Q}$. Аічї sînt доъ întîmплърї а se деосебі:

1) Кînd esпonentѕл m ва fi ѕн нѕмър кѕ соц, шi $= 2n$, атѕнчї некѕnoskѕта x ва авеа доъ прецѕрї, адекъ

$x=\pm\sqrt[2n]{Q}$; dap amꙟndoъ прецȣріле вор fi не-пȣtinчioase, шi x ва fi нȣmaĭ o кътime ꙟнkinȣitъ, кꙟnd Q ва fi negatiв, къчĭ ла ачeastъ ꙟntꙟmпларe este $x=\pm\sqrt[2n]{-Q}$.

2) Кꙟnd esпonentȣл ва fi ȣn нȣmър fъpъ soц, шi $=2n+1$, atȣnчĭ necȣnoskȣta x ва авea нȣmaĭ ȣn преџ, dap ачела ва fi tot dea̋ȣna ȣn прец пȣtinчios, шi ꙟnsъ прец pozitiв, dakъ Q ва fi pozitiв; прец negatiв, dakъ Q ва fi negatiв; вom авea adeкъ:

$$x=\sqrt[2n+1]{+Q}=+\sqrt[2n+1]{Q} \text{ шi } x=\sqrt[2n+1]{-Q}=-\sqrt[2n+1]{Q}.$$

Екzemпле.

I. $x^3+8=0$, dъ $x=\sqrt[3]{-8}=-2$;

II. $x^3-8=0$, dъ $x=\sqrt[3]{8}=2$;

III. $x^4-81=0$, dъ $x=\pm\sqrt[4]{81}=\pm 3$;

IV. $x^4+81=0$, dъ $x=\pm\sqrt[4]{-81}=\pm 3\sqrt[4]{-1}$.

§. 433. Фie каре екȣаціe de fopma $x^{2n}+Px^n+Q=0$, ꙟn каре esпonentȣл пȣtepiĭ чеĭ maĭ ꙟnaлte a necȣnoskȣteĭ ва fi de doъ opĭ maĭ mape de кꙟt esпonentȣл пȣtepiĭ чеĭ maĭ de жos a necȣnoskȣteĭ, se поate tot dea̋ȣna pedȣче ла fopma ȣneĭ екȣаціĭ пътpate. Sъ лȣom $x^n=y$ шi $x^{2n}=y^2$, sъ пȣнem ачеstе pecȣpĭ ꙟn екȣаціa de maĭ sȣs, шi вom авea: $y^2+Py+Q=0$. Dintp'ачeastъ екȣаціe se ва гъsi, дȣпe §. 412.

$y=-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}$; dap fiind къ este $x^n=y$, вom авea ꙟn sfꙟpшit:

$$x=\sqrt[n]{\left(-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}\right)}.$$

Екzемпле.

I. Se чере a se desлега екўаціа $5x = 16 + 2\sqrt{x}$. Sъ пънем $\sqrt{x} = y$; прін ѹрмаре $x = y^2$, ші вом авѣа:

$5y^2 = 16 + 2y$ saў $y^2 - \frac{2}{5}y - \frac{16}{5} = 0$; din каре se ва гъsi $y = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{25} + \frac{16}{5}\right)} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{1}{5} \pm \frac{9}{5}$.

Аша dар ва еші $y = \sqrt{x} = 2$ saў $\sqrt{x} = -\frac{8}{5}$; de ѹnde $x = 4$ saў $x = \frac{64}{25}$.

II. Dакъ вом алътѹра кѹ formѹла џенералъ а ачestѹї параграf екѹаціа $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$, вом гъsi $m = \frac{1}{2}$; $P = -6$ ші $Q = 5$. Пѹind аческе преџѹрї ін локѹл лѹї x ла еsпресііле кътімілор de маї sѹs, вом авѣа пентрѹ екѹаціа датъ:

$x = \sqrt[\frac{1}{2}]{[3 \pm \sqrt{(9-5)}]} = \sqrt[\frac{1}{2}]{(3 \pm 2)}$; прін ѹрмаре $x = \sqrt[\frac{1}{2}]{5} = 25$, saў $x = \sqrt[\frac{1}{2}]{1} = 1$ (§. 265.)

III. Ін екѹаціа $x^3 - 2x\sqrt{x} - 3 = 0$ есте $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$; пѹind dар $m = \frac{3}{2}$; $P = -2$; $Q = -3$, ва fi:

$x = \sqrt[\frac{3}{2}]{[1 \pm \sqrt{(1+3)}]} = \sqrt[\frac{3}{2}]{(1 \pm 2)}$; прін ѹрмаре $x = \sqrt[\frac{3}{2}]{3} = \sqrt[3]{9}$ saў $x = \sqrt[\frac{3}{2}]{-1} = \sqrt[3]{1} = 1$ (§. 265).

IV. Екȣаціа $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2 = 0$ dъ

$m = \frac{1}{3}$; $P = -1$; $Q = -2$; аша dар

$x = \sqrt[\frac{1}{3}]{\left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 2\right)}\right)} = \sqrt[\frac{1}{3}]{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\right)}$; ші

$x = \sqrt[\frac{1}{3}]{2} = 8$ saȣ $x = \sqrt[\frac{1}{3}]{-1} = -1$ (§. 255).

V. Пentpȣ екȣаціа $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ este

$m = 2$; $P = -7$; $Q = 12$; аша dар

$x = \sqrt{\left(\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{49}{4} - 12\right)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}\right)}$;

прin ȣрмаре $x = \pm 2$ saȣ $x = \pm \sqrt{3}$.

Ачeastъ екȣаціе dар аре патрȣ ръdъчinĭ,

$+2$; $+\sqrt{3}$; -2; $-\sqrt{3}$.

§. 434. Se чере прецȣл esпonentȣлȣĭ necȣnoscȣt x, din екȣаціа $c^{2x} + Pc^x + Q = 0$.

Sъ пȣnem $y = c^x$ ші $y^2 = c^{2x}$.

Екȣаціа $y^2 + Py + Q = 0$, каре ѩasъ dintр'ачeastъ sȣбstitȣціе, ва da $y = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$.

Пentpȣ прескȣрtаре sъ пȣnem прецȣл aflat ал лȣĭ $y = D$ ші вом авea $y = c^x = D$, ші dȣпе §. 404. $x \log.c = \log.D$, saȣ $x = \frac{\log.D}{\log.c}$.

§. 435. Ѫn asemeneа кіп se desлeагъ ші екȣаціа $\sqrt[x]{c} + P\sqrt[2x]{c} + Q = 0$. Пȣind adeкъ $y = \sqrt[2x]{c}$, вом авea $y^2 = \sqrt[2x]{c^2} = \sqrt[x]{c}$. Ачeste прецȣрĭ sȣбstitȣindȣ-se ѫn екȣаціа datъ, ва fi $y^2 + Py + Q = 0$, ші прекꙋm s'a ꙋрmat ла параграфꙋл de maĭ sꙋs:

$$y = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)} = D;$$ прin ꙋрmаре

$$\sqrt[2x]{c} = D$$ шi $$\frac{log.c}{2x} = log.D,$$ saŭ $$\frac{log.c}{2\,log.D} = x.$$

De екꙋаціiле кꙋ maĭ mꙋлte неkꙋnoskꙋte.

§. 436. Екꙋаціе nехотърѫтъ se пꙋmеще ачеа, каре копрinde maĭ mꙋлte кътimĭ некꙋnoskꙋte. Прецꙋл некꙋnoskꙋteĭ nꙋ se поate афла пꙋmaĭ dintр' ꙋna de ачеste екꙋаціï, къчĭ de ар fi съ se чее прецꙋл некꙋnoskꙋteĭ x din екꙋаціа $ax + by = c$, s'ар гъsi $x = \frac{c - by}{a}$, adeкъ ꙋn прец, каре atѫрnъ dела чеалалtъ некꙋnoskꙋtъ y. Кѫnd ѫnsъ пеntрꙋ ачелеаш некꙋnoskꙋte x шi y, пе лѫнгъ екꙋаціа de maĭ sꙋs, s'ар da a доъа deoseбitъ екꙋаціе $fx + gy = h$, atꙋnчĭ s'ар пꙋtea афла шi хотърѫ пегрешit прецꙋрiле амѫndꙋрора кътimiлор некꙋnoskꙋte.

Съ пꙋnem ѫn екꙋаціа a доъа ѫn локꙋл лꙋĭ x прецꙋл афлат пеntрꙋ ачеаstъ некꙋnoskꙋtъ din екꙋаціе чеа din tѫĭ $\frac{f(c - by)}{a} + gy = h$, din каре екꙋаціе se гъseще $y = \frac{ah - cf}{ag - bf}$; шi de вom пꙋne ѫn локꙋл лꙋĭ y ачеst прец ѫnтр'ꙋna din екꙋаціiле date $ax + by = c$, saŭ $fx + gy = h$, вom афла шi прецꙋл челiĭ лалte некꙋnoskꙋte, adeкъ $x = \frac{cg - bh}{ag - bf}$.

§. 437. Dintр'ачеаsta se кȣnoaще къ o проблемъ кȣ доъ некȣnoskȣte нȣ se noate хотърꙟ, dакъ нȣ se вор da asfeл de kondiцiї, ꙟнкꙟt dintр'ꙟnsеле съ se noatъ fopma доъ deosebite екȣaцiї ꙟntpe aчеле некȣnoskȣte. Iap daка din кondiцiiле date se вор пȣtea fopma tpeї saȣ maї мȣлte екȣaцiї, atȣnчї проблема se зiче къ este maї мȣлt декꙟt хотърꙟtъ; пentpȣ къ прецȣpiле кътimeлоp некȣnoskȣte, кapе se гъsesк din доъ екȣaцiї але aчеstopa, opї not ръспȣnde шi ла челе лалте екȣaцiї saȣ нȣ. Ла ꙟntꙟia ꙟnтꙟmплаpe челе лалte екȣaцiї sꙟnt de пpisos, iap ла a доъа ꙟntꙟmплаpe проблема копpinde кondiцiї ꙟmпpotiвitoape ȣna aлtia, кapе нȣ se not ꙟmплini ꙟntр'ачеaш вpeme.

Екzemплe.

I. Съ se afле доъ нȣmepe a кърора sȣmъ съ fie S шi difepenцa D.

Съ нȣmim x нȣmърȣл чел maї mape, шi y пe чел maї miк. Дȣпъ кondiцiiле проблемеї вом авеа dap:

$$x+y=S \text{ шi } x-y=D.$$

Din екȣaцia din тꙟiȣ авем $y=S-x$, шi пȣind aчеst пpeц ꙟn локȣл лȣї y ла екȣaцia a доъа, вом гъsi $x-S+x=D$ saȣ $2x=S+D$ шi

$x=\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}D$. Пȣind акȣm aчеst пpeц ꙟn локȣл лȣї x ла ꙟntꙟia saȣ ла a доъа екȣaцie вом авеа $y=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}D$. Аша dap нȣmърȣл чел maї mape este de o notpiвъ кȣ жȣmътate sȣma maї мȣлt жȣmътate difepenцa; чел maї miк de o notpiвъ кȣ жȣmътate sȣma maї пȣцin жȣmътate difepenцa.

II. Sъ se ↑mпарцъ пътърыл a ↑n пропорціе прекът m кътре n. Фіе ъна dintp'ачеste пърці x, ші чеа лалtъ y; прin ърмаре $x+y=a$ ші $x:y=m:n$ saъ $nx=my$. Sъ пънет ла adoъa екъаціа ↑n локъл y прецъл aflat din ↑nt↑иa екъаціе, ші ва fi: $nx=am-mx$ saъ $x(m+n)=am$ ші $x=\frac{am}{m+n}$.

Din a doъa екъаціе se гъseще $y=\frac{nx}{m}$, аша dap ва fi

ші $y=\frac{n}{m}\times\frac{am}{m+n}=\frac{amn}{m(m+n)}=\frac{an}{m+n}$.

S. п. Sъ se ↑mпарцъ пътърыл 36 ↑n пропорціа лъї 5 : 7; fiind dap $a=36$, $m=5$, $n=7$, вот гъsi $x=\frac{36.5}{12}=15$ ші $y=\frac{36.7}{12}=21$.

III. Sъ se гъseaskъ doъ нъмере x ші y каре sъ se аївъ ↑ntpe еле прекът m кътре n; ıар skъz↑ndъ-se dintp'↑nsеле пътърыл a, sъ fie diferenца ↑n пропорціа лъї $p:q$.

Din $x:y=m:n$ se гъseще $nx=my$; din $(x-a):(y-a)=p:q$ гъsim $(x-a)q=(y-a)p$. Dintp'ачеste doъ екъаціï aflъm, прintp'ачеваш лъкраре прекът ↑n челе doъ проблеme de maї sъs:

$x=\frac{am(p-q)}{np-mq}$ ші $y=\frac{an(p-q)}{np-mq}$.

IV. D↑ndъ-se sъma saъ diferенца a doъ пътері къ esпоненціï de o потрівъ, ші пропорціа рьdъчinілор, sъ se гъseaskъ ачеste рьdъчinї

Фіе $x^m\pm y^m=a$ ші $x:y=\frac{y}{x}=b$, прin ърмаре

$y=bx$ ші $y^m=b^m x^m$; ші ва fi

$x^m \pm b^m x^m = a$ saȣ $x^m(1 \pm b^m) = a$, aшa dap

$x^m = \frac{a}{1 \pm b^m}$ шi $x = \sqrt[m]{\frac{a}{1 \pm b^m}}$.

V. Sъ se гъsѣaskъ doъ пȣmepe aʌ къpopa пpodȣkt sъ ſie 21, ꙗp sȣma ʌop sъ ſie 10.

$$xy = 21;\ x + y = 10.$$

Екȣaцia a doъa dъ $y = 10 - x$, шi aчest пpeц sȣбstitȣindȣ-se ʌa ꙟntꙗ екȣaцie, ва da:

$(10 - x)x = 21$ saȣ $x^2 - 10x + 21 = 0$, din кape екȣaцie se ва гъsi $x = 7$ saȣ $x = 3$, шi ſiind къ este $y = 10 - x$, ва fi ʌa aчѣastъ ꙟntꙟmпʌape $y = 3$, ʌa a doъa ꙟntꙟmпʌape ва ſi $y = 7$; aшa dap пȣmepiʌe чepȣte sꙟnt 7 шi 3.

VI. Sъ se гъsѣaskъ doъ пȣmepe, aʌ къpopa пpodȣkt sъ ſie 45, ꙗp difepeнцa ʌop sъ fie 4.

$$xy = 45;\ x - y = 4.$$

Din a doъa екȣaцie aвem $x = y + 4$, шi sȣбstitȣindȣ-se aчest пpeц ꙟn ꙟntꙗ екȣaцie ва eшi

$(y + 4)y = 45$ saȣ $y^2 + 4y - 45 = 0$,

din кape екȣaцie se гъseшe $y = -9$ saȣ $y = 5$, шi de aчѣa ва ſi ʌa ꙟntꙗ ꙟntꙟmпʌape $x = -5$, ʌa a doъa $x = 9$.

VII. Din екȣaцiiʌe $x^2 + y^2 = 269$; $x + y = 23$ dꙟndȣ-se ʌa o пapte пeкȣnoskȣta y ва pъmꙟnѣa

$$x^2 - 23x + 130 = 0$$

шi dintp'aчѣastъ екȣaцie ва eшi $x = \frac{23 \pm 3}{2}$; пpin ȣpmape $x = \frac{23 + 3}{2} = 13$, saȣ $x = \frac{23 - 3}{2} = 10$, шi se ва гъsi $y = 10$ saȣ $y = 13$. Aшa dap пȣmepiʌe чepȣte sꙟnt 13 шi 10, a къpopa sȣmъ este 23, шi aʌe ʌop пътpate adȣnate fak 269.

VIII. Asemenea гъsim din екуаціiле
$x^2+y^2=113$ шi $x-y=1$ нумеріле черуте
$x=8$ шi $y=7$, sau $x=-7$ шi $y=-8$.

IX. $x^2-y^2=a$ шi $x+y=b$; аша dар
$y=b-x$ шi $x^2-(b-x)^2=a$, sau
$x^2-b^2+2bx-x^2=a$, din каре екуаціе
se гъсеще $x=\frac{a+b^2}{2b}$ шi $y=\frac{b^2-a}{2b}$.

X. Din екуаціiле
$x^2-y^2=a$ шi $x-y=b$ гъsim ꙟntр'ачелаш кiп
$x=\frac{a+b^2}{2b}$ шi $y=\frac{a-b^2}{2b}$.

XI. $xy+x=28$ шi $xy-y=18$.
Din ꙟntꙟia екуаціе авем $x=\frac{28-x}{x}$ шi
субstituindu-se ачest прец ꙟn адоъа екуаціе, ва еші
$28-x-\frac{28-x}{x}=18$ sau $x^2-11x+28=0$,
din каре екуаціе se гъсеще $x=\frac{11\pm 3}{2}$; аша dар
$x=7$ шi $y=\frac{28-7}{7}=3$
$x=4$ шi $y=\frac{28-4}{4}=16$.

XII. Съ se гъсеаскъ доъ нумере, ал кърора продукт, сумъ, шi diференца пътрателор съ fie de о потрівъ; sau $xy=x+y=x^2-y^2$.
Ꙟмпърцind екуаціа $x^2-y^2=x+y$ прin $x+y$, вом авеа $x-y=1$ шi $x=y+1$; субstituind дупъ ачеasta ла челе лалte екуаціi прецул аfлат, вом гъsi:

$(y+1)y=y+1+y$ саŭ $y^2-y-1=0$, каре екŭаціе ва da $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Акȣm пȣindȣ-se ачest
прец ꙟn екŭаціа $x=y+1$ ꙟn локȣл лȣĭ y, ва еші:
$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ші fъкꙟndȣ-se черчетаре spре а se
afла dакъ прецȣріле гъsite ръsпȣnd ла kondiціиле
проблемеĭ, se ва гъsi

$xy=x+y=x^2-y^2=2\pm\sqrt{5}$.

XIII. Asemenea din екŭаціиле.

$xy=x-y=x^2-y^2$ se ва гъsi прецȣл лȣĭ

$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ші $x=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}$, ші sȣбstitȣindȣ-se ачесте прецȣрĭ ꙟn локȣл лȣĭ x ші y, ва еші

$xy=x-y=x^2-y^2=-2\pm\sqrt{5}$.

XIV. Se чер доъ нȣмере ал кърора prodȣkt, sȣmъ, ші sȣма пътрателор sъ fie de о потрівъ; саŭ

$$xy=x+y=x^2+y^2.$$

Екŭаціа $xy=x+y$ dъ

$y(x-1)=x$ саŭ $y=\frac{x}{x-1}$.

De вом пȣne ачest прец ꙟn екŭаціа $xy=x^2+y^2$ ꙟn локȣл некȣnoskȣtеĭ y вом авеа:

$\frac{x^2}{x-1}=x^2+\frac{x^2}{(x-1)^2}$. Ачеаstъ екŭаціе ꙟmпърцindȣ-se кȣ x^2, ші dȣпъ ачеа ꙟmmȣлцindȣ-se кȣ $(x-1)^2$, ва da:

$x-1=(x-1)^2+1$ саŭ $x^2-3x+3=0$, din каре екŭаціе se ва гъsi:

$x=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$ ші $y=\frac{x}{x-1}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{1\pm\sqrt{-3}}$; іар fъкѫndȣ-se раціонал nȣmitорȣл frѫnџерії челії din ȣрmъ, ва fi

$$y = \frac{(3 \pm \sqrt{-3})\,(1 \mp \sqrt{-3})}{1+3} = \frac{3 \mp \sqrt{-3}}{2};$$ niще

прецȣрї nепȣtinчioase пentрȣ amѫndoъ nȣmеріле, каре ѫnsъ sȣбstitȣindȣ-se ѫn екȣаціїле date але лȣї x ші y, ръspȣnd ла kondiціїле пропȣse, ші daȣ $xy = x + y = x^2 + y^2 = 3$.

Екȣаціа dap este de sine ѫnsъші nепȣtinчioasъ, пentрȣ къ nȣ se пot гъsі nȣmере каре sъ ѫmплінеaskъ ѫntр'adевър kondiціїле date.

XV. Asemenea din екȣаціїле

$xy = x - y = x^2 + y^2$ se гъsesk niще прецȣрї nепȣtinчioase atѫt пentрȣ x кѫt ші пentрȣ y, adекъ:

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ші $y = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, каре прецȣрї ѫnsъ daȣ іаръші $xy = x - y = x^2 + y^2 = -1$.

§. 438. Este ші алt miжлок de a se da ла o парte din doъ екȣаціії кȣ doъ nекȣnoskȣte ȣna din ачеле nекȣnoskȣte. Sъ zічem къ авem sъ dъm ла o парte пе nекȣnoskȣta y, atȣnчї вom хotърѫ прецȣл еї din amѫndoъ екȣаціїле, ші fie прецȣл aflat din ѫntѫia екȣаціе $y = P$, чел din a doъa екȣаціе $y = Q$, ȣnde кътіmіле P ші Q nȣmaї sѫnt atѫрnate de nекȣnoskȣta y; аша ва fi $P = Q$, пentрȣ къ кътіmї каре sѫnt de o потрівъ кȣ ачеваші a треіа, sѫnt ші ȣna алtia de o потрівъ, ші ѫntр'ачеastъ din ȣрmъ екȣаціе nȣ ва maї fi кoпрinsъ nекȣnoskȣta y.

Екzemплȣ.

Фіе екȣаціїле:

$$3xy - 2y + x = 102 \quad \text{ші} \quad xy + 7y - 8x = 14.$$

Din ѫntѫia екȣаціе авem

$y = \frac{102 - x}{3x - 2}$; din a doъa екȣaціе

$y = \frac{14 + 8x}{x + 7}$; пріn ȣрmаре $\frac{102 - x}{3x - 2} = \frac{14 + 8x}{x + 7}$.

Desfъкѫnd ачеastъ екȣаціе de frѫnцерї шi рѫndȣin-dȣ o, вом гъsi:

$x^2 - \frac{69x}{25} - \frac{742}{25} = 0$, din каре екȣаціе ва еші:

$x = \frac{69 \pm 281}{50}$, аша dар $x = 7$ saȣ $x = -\frac{106}{25}$.

Прецȣл лȣї y se поate акȣm afла din fiекаре din челе doъ екȣації date, s. п. din ѫntѫia екȣаціе гъsim

$y = \frac{102 - x}{3x - 2}$; аша dар fiind къ este $x = 7$, ва fi

$y = \frac{102 - 7}{21 - 2} = 5$, ші пеntрȣ $x = -\frac{106}{25}$ ва еші

$y = -\frac{166}{23}$.

§. 439. Dакъ din doъ екȣації

$$y^2 + Py + Q = 0$$
$$y^2 + py + q = 0,$$

ȣnde P, Q, p, q sѫnt неатѫрнаte de кътimеа y, ва требȣі съ se dеа ла о парtе ачеastъ некȣnoskȣtъ, а-tȣнчї вом хотърѫ прецȣл еї din amѫndoъ екȣаціiле, ші dȣпе §. 412, вом авеа:

ѫntѫia екȣаціе $y = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$

a doъa $y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$;

пріn ȣрmаре,

$$-\frac{P}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)},$$

saŭ $\frac{P-p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{P^2}{4}-Q\right)}\mp\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}.$

Ачeastъ dѹпе ѹрmъ екŭаціе ↑mmѹлціndѹ-se кѹ 2 ва da:

$$P-p=\pm\sqrt{(P^2-4Q)}\mp\sqrt{(p^2-4q)}\ (p^2-4q).$$

Ачeastъ екŭаціе р↑dік↑ndѹ-se ла пъtрat, $P^2-2Pp+p^2=P^2-4Q+p^2-4q-2\sqrt{(P^2-4Q)\ (p^2-4q)}$

saŭ $4(Q+q)-2Pp=-2\sqrt{(P^2-4Q)\ (p^2-4q)}$,

ші ачeastъ екŭаціе ↑mпърціndѹ-se кѹ 2

$$2(Q+q)-Pp=-\sqrt{(P^2-4Q)\ (p^2-4q)}.$$

Р↑dік↑ndѹ-se ↑нкъ o datъ ачeastъ екŭаціе ла пъtрat, dѹпъ ачеа redѹк↑ndѹ-se ші ↑mпърціndѹ-se кŭ 4, ва fi: $Q^2-2Qq+q^2+P^2q-PQp-Ppq+Qp^2=0$ saŭ maĭ пе sкѹрt $(Q-q)^2+(P-p)(Pq-Qp)=0$.

Екzemплѹ.

Sъ se desлеце екŭаціiле:

I. $y^2-5xy+x^2+17=0$

II. $y^2+3xy-2x^2-4=0$.

Ка sъ se dea ла o парte y, dѹпе formѹла de maĭ sѹs, sъ пѹnem $P=-5x$; $Q=x^2+17$; $p=3x$; $q=-2x^2-4$. прin ѹрmаре

$Q-q=3x^2+21=3(x^2+7)$;

$P-p=-8x$; $Pq-Qp=(7x^2-31)x$.

Sѹбstitѹindѹ-se акѹm ачеste прецѹрĭ ↑n чеа dѹпе ѹрmъ екŭаціе a проблеmeĭ цеnерале че maĭ sѹs s'a desлерat, ва fi:

$$9(x^2+7)^2-8x^2(7x^2-31)=0,$$

saŭ $x^4-\frac{274}{47}x^2-\frac{441}{47}=0.$

Dintр'ачeastъ екŭаціе ва еші, dѹпе §. 433:

$x^2 = \frac{187 \pm 236}{47}$, аша dap $x^2 = 9$ saȣ̆ $x^2 = -\frac{49}{47}$.
Прецȣл чел din tѫĭ дъ $x = \pm 3$, чел de ал doĭлеа $x = \pm\sqrt{-\frac{49}{47}}$, аша dap о кътime непȣtinчioasъ.
Пȣind акȣm ѫn чea din tѫȣ̆ екȣ̆аціe datъ $x = 3$, ва fi $y^2 - 15y + 26 = 0$, din каpe екȣ̆аціe se гъseще $y = 13$ saȣ̆ $y = 2$. Iap de вom пȣne ѫn a doъa екȣ̆аціe $x = 3$, вom авea $y^2 + 9y - 22 = 0$, de ȣnde $y = 2$ saȣ̆ $y = -11$. Прецȣpiле $x = 3$ ші $y = 2$ ръспȣnd dap ла amѫndoъ екȣ̆аціiле date N° I ші II. Asemenea se ва гъsi къ ші прецȣpiле $x = -3$ ші $y = -2$ ръспȣnd ла ачелеаш екȣ̆аціĭ.

§. 440. A tpeia metodъ de a da ла о парte о нeкȣnoskȣtъ din екȣ̆аціĭ кȣ doъ нeкȣnoskȣte.

Dакъ tepminiĭ че sѫnt a se da ла о парte вор fi ѫn amѫndoъ екȣ̆аціiле de о notpiвъ, ші вор авea semne de о notpiвъ, atȣnчĭ sъ se skazъ о екȣ̆аціe din чеалалтъ, ші ва еші о екȣ̆аціe ноъ fъpъ de ачеĭ tepminĭ. Iap dакъ tepminiĭ че sѫnt a se da ла о парte вор fi de о notpiвъ, ші semneле лор deoseвite ѫn amѫndoъ екȣ̆аціiле, atȣnчĭ adȣnѫndȣ-se amѫndoъ екȣ̆аціiле ȣna кȣ алta ва еші о ноъ екȣ̆аціe fъpъ de ачеĭ tepminĭ.

Екzemnле.

I. Dѫndȣ-se sȣma ші difepenца a doъ пȣtepĭ. sъ se гъseaskъ ръdъчiniле лор.

Фie $x^m + y^n = a$; $x^m - y^n = b$.

Adȣnѫndȣ-se amѫndoъ екȣ̆аціiле ȣna кȣ алta, ва еші $2x^m = a + b$ ші $x = \sqrt[m]{\frac{a+b}{2}}$.

Sкъzîndȣ-se a doъa екȣаціе din чea din tîiȣ, se ва гъsi $2y^n = a - b$ ші $y = \sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}$.

II. De se вор чере преціȣріле лȣї x ші y din екȣаціїле: $x^2+y^2+x+y=a$ ші
$x^2-y^2+x-y=b$,

se ва гъsi sȣма лор $x^2+x=\frac{a+b}{2}$;

іар difepenца лор, sкъzîndȣ-se a doъa екȣаціе din чea din tîiȣ, ва da $y^2+y=\frac{a-b}{2}$.

Аша dap ва еші $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\right)}$

ші $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{a-b}{2}\right)}$.

§. 441. Іаp dакъ tepminiї каpe sînt a se da ла o паpte нȣ вор fi de o потрівъ, atȣнчї ачеastъ metodъ se întpeбȣінцeazъ dȣпе кіпȣл ȣpмътоp.

Фіе $P+Q=A$ ші $R-S=B$, doъ екȣаціїdin каpe tpeбȣе sъ se dea ла o паpte кътіміле P ші R. Sпpe ачеst sfîpшit sъ se кaȣte нȣмъpȣл чел маї мік V каpe sъ se поаtъ împъpці пpin P ші R (§. 130), ші fie $V:P=p$; $V:R=r$. Акȣм sъ se înмȣлцеаskъ întîia екȣаціе кȣ p, a doъa кȣ r, ші ва fi $Pp+Qp=Ap$ ші $Rr-Sr=Br$, saȣ $V+Qp=Ap$ ші $V-Sr=Br$; пепtpȣ къ ecte $V=Pp=Rr$. Sкъzîndȣ-se dȣпъ ачееа екȣаціа чea din ȣpмъ din чea din tîї, ва еші $Qp+Sr=Ap-Br$; аша dap o екȣаціе fъpъ de P ші R.

De вор fi sъ se dea ла o паpte кътіміле Q ші S, atȣнчї гъseaskъ-se іаръш нȣмъpȣл чел маї мік T

каре съ se поатъ ꙟmпърцi кȣ Q шi S, шi fie $T:Q=q$; $T:S=s$. Съ se ꙟmmȣлцѣaskъ dap ꙟntꙟa екȣацie кȣ q, a doъa кȣ s, шi ва fi $Pq+Qq=Aq$ шi $Rs-Ss=Bs$; dap fiind къ este $Qq=Ss=T$, ва fi шi $Pq+T=Aq$, шi $Rs-T=Bs$. Adȣнꙟndȣ-se amꙟndoъ екȣацiiле челе din ȣpmъ ȣna кȣ алta ва еши, $Pq+Rs=Aq+Bs$; аша dap о екȣацie фъръ de къtimiле Q шi S.

Екzemпле.

I. Se чер прецȣpiле лȣї x шi y din екȣацiiле

$$A).\quad mx+y=a.$$
$$B).\quad x+ny=b.$$

Съ se ꙟmmȣлцѣaskъ екȣацia B кȣ m, шi съ se skazъ екȣацia A; adeкъ:

$$mny-y=bm-a \text{ шi } y=\frac{bm-a}{mn-1}.$$

Iap de se ва ꙟmmȣлцi екȣацia A кȣ n шi se ва skъdѣa B, ва fi

$$mnx-x=an-b, \text{ шi } x=\frac{an-b}{mn-1}.$$

II. Съ se afле прецȣpiле x шi y din екȣацiiле

$$A).\quad 21x+20y=288;$$
$$B).\quad 14x-12y=40.$$

Nȣmърȣл чел maї mik каре se поаte ꙟmпърцi прin 21 шi 14 este 42, шi

$$42:21=2;\ 42:14=3.$$

Съ se ꙟmmȣлцѣaskъ dap A кȣ 2, B кȣ 3, шi ва fi

$$42x+40y=576;$$
$$42x-36y=120.$$

Ачeste екȣацiї skъzꙟndȣ-se ȣna dintp'алta вop da

$$76y=456 \text{ шi } y=\frac{456}{76}=6.$$

Чел maĭ mik нътър каре se поate ꙟmпърці кꙋ 20 ші 12 este 60, ші

$$60 : 20 = 3;\ 60 : 12 = 5.$$

Sъ se ꙟmmꙋлцёаskъ dap екꙋаціа A кꙋ 3, B кꙋ 5, ші ва fi:

$$63x + 60y = 864;$$
$$70x - 60y = 200.$$

Sꙋma ачestop doъ екꙋації dъ

$$133x = 1064 \text{ ші } x = \frac{1064}{133} = 8.$$

§. 442. Dакъ екꙋаціiле вор копrinde maĭ mꙋлte пꙋterĭ але къцimiлор че требꙋе sъ se dea ла о парte, atꙋнчĭ se вор лепъda ачеле пꙋterĭ ꙋna dꙋпъ алta, dꙋпе кinꙋл ꙋрmъtop.

Фie date ꙋрmъtoареле doъ екꙋації.

$$A)\ y^2 + 3xy - 2x^2 - 4 = 0$$
$$B)\ y^2 - 5xy + x^2 + 17 = 0.$$

Skъzꙟndꙋ-se екꙋаціа B din екꙋаціа A, ва еші

$$C)\ 8xy - 3x^2 - 21 = 0.$$

Акꙋm sъ se ꙟmꙋлцёаskъ ꙋna din екꙋаціiле челе din tꙟĭ s. п. B кꙋ $8x$, ші екꙋаціа C кꙋ y, ші ва fi:

$$8xy^2 - 40x^2y + 8x^3 + 136x = 0 \text{ ші}$$
$$8xy^2 - 3x^2y - 21y = 0.$$

Ачеastъ din ꙋрmъ екꙋаціе skъzꙟndꙋ-se din чеа dinainte, dъ:

$$D)\ -37x^2y + 21y + 8x^3 + 136x = 0.$$

Din екꙋаціа C) se гъseщe $y = \dfrac{3x^2 + 21}{8x}$;

Din екꙋаціа D) afлъm $y = \dfrac{8x^3 + 136x}{37x^2 - 21}$;

аша dар $\frac{3x^2+21}{8x}=\frac{8x^3+136x}{37x^2+21}$,

каре екȣаціе рѫndȣindȣ-se ва da:

$$x^4-\frac{474}{47}x^2+\frac{441}{47}=0 \quad §.\ 439.$$

Ачest feл de лȣкраре dȣче maĭ tot dѣȣna ла екȣаціĭ de градȣрĭ maĭ ѫnалte; de ачѣа niчĭ se кȣвine ачѣastъ metodъ ѫn Алџебра елеmentаръ.

§. 443. Фіе $x^m y^n=a$, ші $x^r y^s=b$. Рѫdiкѫndȣ-se ѫntѫia екȣаціе ла пȣтерѣ кȣ esпоnentȣлȣĭ s, iар a doъa екȣаціе ла пȣтерѣ n, ва fi:

$$x^{ms}y^{ns}=a^s, \text{ ші } x^{nr}y^{ns}=b^n.$$

Sъ se ѫmпарџъ акȣm чѣа din tѫĭ екȣаціе dintр'ачestѣ прin чѣа din ȣрmъ, ші ва fi:

$$\frac{x^{ms}}{x^{nr}}=\frac{a^s}{b^n}, \text{ saȣ } x^{ms-nr}=\frac{a^s}{b^n}, \text{ ші } x=\left(\frac{a^s}{b^n}\right)^{\frac{1}{ms-nr}}.$$

Asemenѣ se ва пȣтѣ da ла о парте x; adeкъ: рѫdiкѫnd ѫntѫia екȣаціе datъ ла пȣтерѣ кȣ esпоnentȣл r, ші a doъa екȣаціе ла пȣтерѣ m, ва fi:

$x^{mr}y^{sr}=a^r$, ші $x^{mr}y^{mn}=b^m$; прin ȣрmаре, ѫmпърџindȣ-se екȣаціа din ȣрmъ прin чѣа dinainte, ва еші:

$$\frac{y^{ms}}{y^{nr}}=y^{ms-nr}=\frac{b^m}{a^r}, \text{ ші } y=\left(\frac{b^m}{a^r}\right)^{\frac{1}{ms-nr}}$$

Екzemпле.

Фіе $x\sqrt[3]{y}=a$ ші $y\sqrt{x}=b$. Sъ se рѫdiче ѫntѫia екȣаціе ла пȣтерѣ a треia, adeкъ $x^3y=a^3$, ші sъ se ѫmпарџъ ачѣastъ екȣаціе прin чѣа de ал doiлѣ, ші ва fi

$$\frac{x^3}{\sqrt{x}}=\frac{a^3}{b} \text{ saȣ } x^{\frac{5}{2}}=\frac{a^3}{b}, \text{ ші } x^5=\frac{a^6}{b^2}; \text{ прin ȣрmаре}$$

$x = \sqrt[5]{\frac{a^6}{b^2}} = a\sqrt[5]{\frac{a}{b^2}}$. Din a doъa ekȣaцie se гъseщe $y = \frac{b}{\sqrt{x}}$. Dap fiind къ este $\sqrt{x} = \sqrt{\left(\sqrt[5]{\frac{a^6}{b^2}}\right)} = \sqrt[10]{\frac{a^6}{b^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}$; ва fi щi $y = \frac{b}{\sqrt{x}} = b\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}$.

§. 444. Dakъ проблема ва копрinde tpeĭ къtimĭ nekȣnoskȣte, тpeбȣe sъ se dea ɥаръш tpeĭ ekȣaцiĭ кȣ deoseбite kondiцiĭ але ачестор nekȣnoskȣte; къчĭ кȣ maĭ пȣцine ekȣaцiĭ nȣ se вор пȣtea хotърɪ aчeste къtimĭ. Фie dap x, y, z къtimiле nekȣnoskȣte, але къpopa прецȣрĭ sɪnt a se afла din tpeĭ ekȣaцiĭ. Ɪntɪmплъpiле kape se пot iвi ла aчeste ekȣaцiĭ, sɪnt челе ȣpmътoape:

1) Кɪnd ɪntɪɥа щi a doъa ekȣaцie вор авеа fie kape къtimiле x щi y, ɥар a tpeɥа ekȣaцie къtimiле x щi z saȣ y щi z; atȣnчĭ прецȣрiле лȣĭ x щi y se вор пȣtea хotърɪ din ɪntɪɥа щi a doъa ekȣaцie, ɥар прецȣл лȣĭ z din ekȣaцia a tpeɥа, пȣindȣ-se ɪntp' aчeastъ ekȣaцie ɪn локȣл лȣĭ x saȣ ɪn локȣл лȣĭ y прецȣрiле afлate. S. п.

$$A)\quad 5x - 7y = 1.$$
$$B)\quad 3x + 6y = 27.$$
$$C)\quad 2x + 7z = 8.$$

Din ekȣaцiiле A щi B se гъseщe $x = 3$; $y = 2$. Пȣindȣ-se акȣm прецȣл лȣĭ x ɪn ekȣaцia C, ва eщi $z = \frac{2}{7}$.

2) Asemenea desлerape se пoate da щi кɪnd челе doъ din tpĭ ekȣaцiĭ вор копрinde fie kape пe x щi y, ɥар a tpeɥа ekȣaцie пe x, y щi z; atȣnчĭ adekъ пȣin-

dȣ-se ꙟn екȣаціа а трега ꙟn локȣл лȣї x ші y прецȣріле ачеstор некȣноskȣте, афлате din челе доъ din тꙟї екȣацiї, se ва гъsi прецȣл лȣї z.

Екzемплȣ:

$$A) \quad 5x - y = 16.$$
$$B) \quad 15x - 7y = 12.$$
$$C) \quad 8x + 3y - 6z = 7.$$

Din екȣаціїле A ші B se гъseще $x = 5$; $y = 9$, ші пȣindȣ-se ачеste прецȣрї ꙟn екȣаціа C, ва еші $40 + 27 - 7 = 6z$; аша dар $z = 10$.

3) Кꙟnd ꙟntꙟга екȣаціе ва копрinde x ші y, adoъа x ші z, а трега y ші z, атȣнчї прецȣріле некȣноskȣтелор se пот афла ꙟn доъ кіпȣрї.

Ꙟntꙟї: Съ se dea ла о парте некȣноskȣта z din adoъа ші а трега екȣаціе; кȣ ачеst кіп se ва добꙟndi о поъ екȣаціе каре ва копрinde пе x ші y, але късорa прецȣрї se пот dȣпе ачеea афла dintр'ачеastъ dȣпе хртъ ші din чеа din тꙟї екȣаціе. Іар dакъ прецȣріле лȣї x ші y вор fi кȣноskȣте, атȣнчї прецȣл лȣї z se ва пȣтеа гъsi атꙟт din adoъа кꙟт ші din а трега екȣаціе.

Екzемплȣ:

$$A) \quad xy + x + y = 23.$$
$$B) \quad xy + x + z = 17.$$
$$C) \quad yz + y + z = 11.$$

Екȣаціїле B ші C daȣ $z = \frac{17 - x}{1 + x} = \frac{11 - y}{y + 1}$, din каре екȣаціе еse $y = \frac{2x - 1}{3}$. Dар екȣаціа A dъ

$y = \frac{23 - x}{x + 1}$; аша dар ва fi $\frac{2x - 1}{3} = \frac{23 - x}{x + 1}$ каре кѯацie рѫndѕindѕ-se dъ $x^2 + 2x - 35 = 0$ de ѕnde $x = -1 \pm 6$. Аша dар $x = 5$, саѷ $x = -7$. Ши fiind къ este $y = \frac{2x - 1}{3}$ ши $z = \frac{17 - x}{x + 1}$, ва fi ши $y = 3$ саѷ $y = -5$, ши $z = 2$ саѷ $z = -4$.

A doъa metodъ de a afла прецѕл пекѕпоскѕтелор ѫп ачеastъ a трета ѫтѫmпларе este dѕпе кѕm ѕрmеазъ: sъ se каѕte din ѫнтѫiа ши a doъa екѷацie прецѕрiле пекѕпоскѕтелор y ши z, каре прецѕрї вор атѫрпа ѫпкъ dела копsѕпата x. Акѕm de se вор пѕне ачесте прецѕрї ѫп a трета екѕацie ѫп локѕл лѕї y ши z, ва еши о екѷацie каре ва копрinde пѕmаї пе пекѕпоскѕта x, ал кърia прец se ва пѕтеа afла dintр'ачеastъ екѕацie. Екzeмплѕ:

$$A)\ 5x - 3y = 6.$$
$$B)\ 7x + z = 47.$$
$$C)\ 5y - 4z = 20.$$

Екѷацia A dъ $y = \frac{5x - 6}{3}$; B dъ $z = 47 - 7x$.

Dакъ ачесте прецѕрї se вор sѕбstitѕа ѫп екѕацia C, ва еши екѷацia $\frac{5(5x - 6)}{3} - 4\,(47 - 7x) = 20$, din каре se гъсеще $x = 6$, прin ѕрmаре $y = \frac{30 - 6}{3} = 8$, ши $z = 47 - 42 = 5$.

4) Dакъ ѫнтѫiа екѷацie ва копрinde пе x ши y, a doъa пе x ши z, ши a трета пе x, y ши z, iаръш ѫп doъ кiпѕрї, ка ши ѫп казѕл чел din тѫї, se пот хотърѫ ачесте пекѕпоскѕте: adекъ орї dѫndѕ-se ла

о парте z din екѕаціа a доъа ші a трења, ш ч л, saѕ хотърмndѕ-se din екѕаціа мntмia ші a доъа преців-ріле лѕї y ші z, атмрnate nѕmaї de nекѕnoskѕтa x, ші пѕindѕ-se ачеste преців-рї ла a трења екѕаціе мn локѕл ачелораш nекѕnoskѕте;

Екzemплѕ:

Sъ se мmпарцъ пѕтърѕл a мn треї пърцї x, y, z, каре sъ se аїбъ мntре еле прекѕm $m:n:p$. Фiind къ дар se чере sъ fie $x:y=m:n$ ші $x:z=m:p$. ва fi ші

$$A)\ nx = my.$$
$$B)\ px = mz.$$
$$C)\ x+y+z = a.$$

Din Екѕаціа A њasъ $y=\frac{nx}{m}$; din B, $z=\frac{px}{m}$, ші пѕindѕ-se ачеste преців-рї мn екѕаціа a трења мn локѕл лѕї y ші z, вом авеа:

$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$, ші $x=\frac{am}{m+n+p}$; прin ѕрмаре

$$y=\frac{nx}{m}=\frac{amn}{(m+n+p)\,m}=\frac{an}{m+n+p}, \text{ ші}$$

$$z=\frac{px}{m}=\frac{amp}{(m+n+p)\,m}=\frac{ap}{m+n+p}.$$

5) Кмnd мntмia екѕаціе ва копрinde пе x ші пе y, њар fie-каре din челе лалte доъ екѕаціï пе кмte трелe nекѕnoskѕтeлe x, y ші z.[1]

Атѕnчї орї se ва лепъда z din a доъа ші a трења екѕаціе, ші прin мmбinарња екѕаціеї чеї поъ каре ва резѕлta дѕпе ачеаstъ лепъдаре, кѕ мntмia екѕаціе, se ва хотърм преців-л лѕї x, ші ал лѕї y; saѕ din мntмia ȋntȋѩ екȣаціе se ва алеџе прецȣл лȣї y прin некȣноskȣta x, ші пȣind ачest прец ȋn a доъа ші a треѩ екȣаціе, вор резȣлta доъ екȣаціï кȣ доъ некȣноskte x ші z, ші прin ȣрмаре se вор пȣtea хотърȋ ші прецȣріле ачestор некȣноskȣte.

Екzемплȣ.

$$A)\ mx = ny.$$
$$B)\ x^2 + y^2 + z^2 = a.$$
$$C)\ z^2 - 2xy = b.$$

Скъzȋndȣ-se C din B ва еші

$$x^2 + 2xy + y^2 = a - b,$$

ші скоцȋndȣ-se ръдъчіна пътратъ din амȋndoъ пърціле ачещіï екȣаціï, ва fi:

$x + y = \sqrt{(a-b)}$, ші $y = \sqrt{(a-b)} - x$

прin ȣрмаре $mx = ny = n\sqrt{(a-b)} - nx$, ші

$$x = \frac{n\sqrt{(a-b)}}{m+n};\ y = \frac{mn\sqrt{(a-b)}}{n(m+n)} = \frac{m\sqrt{(a-b)}}{m+n},$$

ші $z^2 = b + 2xy = b + \dfrac{2mn(a-b)}{(m+n)^2} = \dfrac{b(m^2+n^2)+2amn}{(m+n)^2}$,

аша dар $z = \dfrac{\sqrt{[b(m^2+n^2)+2amn]}}{m+n}$.

6) Dакъ fie-каре din челе треї екȣаціï ва копрinде пе тоtе треле некȣноskȣтеле, atȣнчї съ se deа ла ла o парte некȣноskȣta z din ȋntȋѩ ші din a доъа екȣаціе, ші ѩаръш ачеѩаш некȣноskȣтъ din екȣаціѩ a треѩ ші dintр'ȣна de челе din тоtї екȣаціï. Прintр'ачеasтъ операціе se вор fорма доъ екȣаціï кȣ копрinderеа некȣноskȣтелор x ші y, ал кърора прец dȣпе ачеа afлȋndȣ-se прin metoda обічнȣitъ, ші sȣбstitȣindȣ-se ȋn вре ȣна din челе треї

екȣ̆ацiĭ date, se ва пȣtea гъsi шi прецȣл z.

I. Екzемплȣ:

$$A)\quad 2x - 3y + z = 6.$$
$$B)\quad 5x + 2y - 7z = 53.$$
$$C)\quad 10x - 5y - 3z = 82.$$

Ѫmmȣлцindȣ-se екȣ̆ациа A кȣ 7, шi adъогѫndȣ-se ла B, ва da:
$19x - 19y = 95$, шi ачеаstъ екȣ̆ацie ѫmпърцindȣ-se кȣ 19, ва еші:

$$D)\quad x - y = 5.$$

Ѫmmȣлцindȣ-se A кȣ 3, шi adъогѫndȣ-se C ва fi $16x - 14y = 100$, saȣ̆ ѫmпърцindȣ-se toатъ екȣ̆ациа кȣ 2, ва еші:

$$E)\quad 8x - 7y = 50.$$

Ѫmmȣлцindȣ-se екȣ̆ациа D кȣ 7 шi skъzѫndȣ-se din екȣ̆ациа E, ва еші $x = 15$; ѩр de se ва ѫmmȣлцi D кȣ 8 шi de se ва skъdea din E, ва fi $y = 10$; шi пȣindȣ-se ачеste прецȣрĭ ѫn екȣ̆ациа A ѫn локȣл лȣĭ x шi y, ва еші:

$$30 - 30 + z = 6 \text{ saȣ̆ } z = 6.$$

Аша dар кътimiле черȣte sѫnt $x = 15$; $y = 10$ шi $z = 6$.

II. Екzемплȣ:

$$A)\quad xy + xz = 5.$$
$$B)\quad xy + yz = 8.$$
$$C)\quad xz + yz = 9.$$

Хотърѫndȣ-se прецȣл лȣĭ z din fie-каре dintр'ачеste треĭ екȣ̆ацiĭ, ва еші:

$$\text{din } A)\ z = \frac{5 - xy}{x}$$

$$\text{din } B)\ z = \frac{8 - xy}{y}$$

$$\text{din } C)\ z = \frac{9}{x + y}.$$

Ачесте треї прецѕрї але лѕї z daѕ ѕрmъtoapeле екѕаціїї:

1) $\frac{5 - xy}{x} = \frac{9}{x + y}$, din каре ѥсъ

$$D)\ xy^2 + x^2y - 5y + 4x = 0,\ \text{ші}$$

2) $\frac{8 - xy}{y} = \frac{9}{x + y}$, din каре ѥсъ

$$E)\ xy^2 + x^2y + y - 8x = 0.$$

Акѕm de вom sкъdea екѕаціа D din E, вom авеа, $6y - 12x = 0$, ші $y = 2x$.

Ачest прец пѕindѕ-se ꙟn екѕаціа E ꙟn локѕл лѕї y, ва da $6x^3 - 6x = 0$, saѕ ꙟmпърціndѕ-se ачеаstъ екѕаціе кѕ $6x$, ва еші $x^2 - 1 = 0$; аша dap $x = \pm 1$, ші $y = 2x = \pm 2$; ꙟn sfꙟршit,

$$z = \frac{9}{x + y} = \frac{9}{\pm 3} = \pm 3.$$

Dintp'ачеаsta se веde къ прецѕріле каре ръsпѕnd ла екѕаціiле date sꙟnt opї $x = 1$, $y = 2$ ші $z = 3$, saѕ $x = -1$, $y = -2$ ші $z = -3$.

§. 445. Din екѕаціiле $x^h y^i z^k = a$, $x^m y^n z^r = b$, $x^s y^t z^u = c$, se вор afла прецѕріле лѕї x, y, z dѕпе кіпѕл ѕрmъtop.

Sъ se pꙟdiче ꙟntꙟia ші a doъa екѕаціе ла пѕtepї каре sъ fакъ a fi esпonenціїї лѕї z de o potpівъ ꙟn amꙟndoъ екѕаціiле; adекъ $x^{hr}y^{ir}z^{kr} = a^r$, ші $x^{km}y^{kn}z^{kr} = b^k$, ші съ se ꙟпарцъ пріntр'ачеastъ din ѹрmъ екѹаціе чеа maĭ dinainte, atѹnчі ва еші:

$$A)\ x^{hr-km} \times y^{ir-kn} = \frac{a^r}{b^k}$$

Кѹ asemenеа лѹкраре съ se dea ла о парте z din ꙟntꙟіа ші a тpeіа екѹаціе, префъкꙟndѹ-se ачеste екѹації ꙟn челе ѹрmътоаре:

$$x^{hu} y^{iu} z^{ku} = a^u\text{, ші } x^{ks} y^{kt} z^{ku} = c^k\text{,}$$

ші ꙟшпърцindѹ-se екѹація чеа maĭ dinainte кѹ ачеаsta dѹпе ѹрmъ, ва еші:

$$B)\ x^{hu-ks} \times y^{iu-kt} = \frac{a^u}{c^k}.$$

Фііnd къ акѹm екѹаціїле A ші B аѹ de пѹтері пѹmaĭ пе x ші пе y, se поаte ѹрmа лѹкрареа пentрѹ deslегареа ачеstѹĭ проблеm dѹпе кѹm s'a аръtat ла §. 443.

Екzemплѹ: Se чер прецѹріле къtimелор x, y, z din екѹаціїле $x\sqrt{y} = a$; $x\sqrt{z} = b$ ші $y\sqrt{z} = c$.

A doъа екѹаціе ꙟmпърцindѹ-se пріn a тpeіа, дъ $\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$; рꙟdікꙟndѹ-se ꙟntꙟіа екѹаціе datъ ла пътpat, ші ꙟmmѹлцindѹ-se кѹ ачеаstъ din ѹрmъ, ва еші $x^2 y \cdot \frac{x}{y} = x^3 = \frac{a^2 b}{c}$, аша dap $x = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c}}$

Din екѹація $\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$ ва еші ꙟnкъ

$$y = \frac{c}{b} x = \frac{c}{b} \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2 c^2}{b^2}}.$$ Dap авеm

$$\sqrt{z} = \frac{b}{x} = \sqrt[3]{b^3} : \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{b^2 c}{a^2}};$$ пріn ѹрmаре

$$z = \sqrt[3]{\frac{b^4 c^2}{a^4}} = \frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{bc^2}{a}}.$$

§. 446. Аша dap ꙟn deoбще se поate хотърꙟ орї че проблеme, кꙟnd din kondiціiле пропȣse se пot fор-ma tot атꙟtea екȣацiї, кꙟte кътimї некȣnoskȣte sꙟnt, шi din парагрaфеле de maї nainte se доведеще, къ прецȣріле некȣnoskȣтелор, орї кꙟte ар fi еле, se пot афла, dакъ fie-каре din еле ȣnа dȣпе алта se вор skoate афаръ din екȣаціiле date.

§. 447. De mȣлte орї прецȣріле некȣnoskȣтелор se пot афла mȣлt maї лesne прin оаре каре потрівite skimбърї але екȣаціiлор date, декꙟt прin лȣкрърiле аръtate пънъ аічї. Ачеste ꙟnлesnірї ꙟnsъ nȣ se пot аръta прin регȣлї хотърꙟte, декꙟt nȣmaї din mȣлte екzemпле se пot adȣna шi ꙟnвъца; dintр'ачеstea sꙟnt шi челе хрinъtоаре.

I. Se чер прецȣріле лȣї x шi y din екȣаціiле

$$x^{2m}+y^{2n}=a, \text{ шi } x^m y^n=b.$$

Ꙟmmȣлціnd а доъа екȣаціе кȣ 2, шi adъогꙟndȣ о ла ꙟntꙟia екȣаціе, вom авеа $x^{2m}+2x^m y^n+y^{2n}=a+2b$. Шi skoцꙟndȣ-se ръdъчina пътратъ din amnꙟdoъ пърціле екȣаціi, ва еші: $x^m+y^n=\sqrt{(a+2b)}$; іар de вom skъdea $2x^m y^n=2b$ din ꙟntꙟia екȣаціе, ва fi: $x^{2m}-2x^m y^n+y^{2n}=a-2b$, шi skoцꙟndȣ-se ръdъчina пътратъ: $x^m-y^n=\sqrt{(a-2b)}$. Din сȣma шi diференца а доъ пȣтерї se гъсеще ръdъчina; adeкъ adъогꙟndȣ-se сȣma кȣ diференца ва еші, $2x^m=\sqrt{(a+2b)}+\sqrt{(a-2b)}$, шi skъzꙟndȣ-se diференца din сȣmъ se ва гъsi

$2y^2=\sqrt{(a+2b)}-\sqrt{(a-2b)}$. De ȣnde

$$x=\sqrt[m]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+2b)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-2b)}\right]} \text{ шi}$$

$$y=\sqrt[n]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+2b)}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-2b)}\right]}.$$

II. Sъ se гъsѣaskъ прецȣріле лȣї x ші y din екȣацііле

$$x^3+y^3=a, \text{ ші } xy(x+y)=b.$$

Ꙟmmȣлцindȣ-se adoъa екȣаціе кȣ 3, ші adъогꙟndȣ-se ла ꙟntꙟіа екȣаціе продȣктȣл

$$3x^2y+3xy^2=3b, \text{ ва еші}$$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=a+3b$$

партеа чеа din тꙟї а ачещії екȣації este форматъ din кȣбȣл бinomȣлȣї $x+y$; скоцꙟndȣ-se dap ръdъчina кȣбікъ din amꙟndoъ пърціле ачещії екȣації, ва fi:

$$x+y=\sqrt[3]{(a+3b)}.$$

Ꙟmпърцindȣ-se акȣm amꙟndoъ екȣацііле date кȣ $x+y$, ва fi $x^2-xy+y^2=\frac{a}{x+y}$, ші $xy=\frac{b}{x+y}$, saȣ скоцꙟndȣ-se ачеаstъ din ȣрmъ екȣаціе din чеа de maї nainte

$$x^2-2xy+y^2=\frac{a-b}{x+y}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{(a+3b)}};$$

прin ȣрmаре, dакъ вom скоаte ръdъчina пътратъ din amꙟndoъ пърціле екȣаціеї, вom авеа

$$x-y=\frac{\sqrt{(a-b)}}{\sqrt[6]{(a+3b)}}, \text{ ші fiind къ dȣпъ}$$

§. 437, 1) авem $x+y=\sqrt[3]{(a+3b)}$, ва fi

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(a+3b)}+\frac{\sqrt{(a-b)}}{\sqrt[6]{(a+3b)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(a+3b)}+\sqrt{(a-b)}}{2\sqrt[6]{(a+3b)}}$$

XXXVIII.

$$\text{ші } y = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(a+3b)} - \frac{\sqrt{(a-b)}}{\sqrt[6]{(a+3b)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a+3b)} - \sqrt{(a-b)}}{2\sqrt[6]{(a+3b)}}$$

III. Съ se afлe прецѕріле лѕї x ші лѕї y din екѕаціі-ле $(x^2+y^2)(x+y)=m$ ші $(x^2-y^2)(x-y)=n$.

Съвѣршіndѕ-se ѣmmѕлціреа, ва еші·

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = m \text{ ші}$$
$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = n.$$

Adѕnѣndѕ-se ачесте екѕації, ші sѕma лор ѣmпърціndѕ-se кѕ 2, ва fi $x^3+y^3=\frac{m+n}{2}$; іар de se ва skъdea екѕаціа чеа din жос din чеа din sѕs, ші de se ва ѣmпърці difepenца лор іаръш кѕ 2, se ва гъsi: $x^2y+xy^2=xy(x+y)=\frac{m-n}{2}$; ші аша desлeгарea maї de napte ва fi ачеваш, прекѕm ла проблеmѕл de maї sѕs, пѕіndѕ-se пѕmaї ѣn локѕл лѕї x ші лѕї y прецѕріле afлate $a=\frac{m+n}{2}$, $b=\frac{m-n}{2}$, аша dap $a+3b=2m-n$, ші $a-b=n$, de ѕnde se ва гъsi $x=\frac{\sqrt{(2m-n)}+\sqrt{n}}{2\sqrt[6]{(2m-n)}}$ ші

$$y=\frac{\sqrt{(2m-n)}-\sqrt{n}}{2\sqrt[6]{(2m-n)}}.$$

IV. Съ se desлeџe екѕаціа $x^2+y^2=160$ ші $x+y=\frac{xy}{3}$.

Din екѕаціа а доъа se фаче $xy=3(x+y)$ saѕ

$2xy = 6(x+y)$, ші adȣнꙟndȣ-se ачеаstъ екўаціе кȣ чеа din тꙟї, ва da:

$x^2 + 2xy + y^2 = 160 + 6(x+y)$, saȣ

$(x+y)^2 - 6(x+y) - 160 = 0$ ші

de se ва пȣне $x+y=z$, ва fi:

$z^2 - 6z - 160 = 0$, ші $z = 3 \pm \sqrt{169} = 3 \pm 13$'

аша dар $z = x+y = 16$, saȣ $x+y = -10$ ла ꙟntꙟia ꙟntꙟmпларе, fiind прецȣл лȣї $y = 16 - x$, ші пȣindȣ-se ачest прец ꙟn екўаціа $xy = 3(x+y)$, ва fi $x^2 - 16x + 48 = 0$, ші $x = 12$, $y = 4$ ла a doъа ꙟntꙟmпларе, fiind прецȣл лȣї $y = -10 - x$ ші пȣindȣ-se ꙟntр'ачеваш екўаціе ва еші,

$x^2 + 10x - 30 = 0$; аша dар

$x = -5 + \sqrt{55}$ ші $y = -5 - \sqrt{55}$.

Аша dар прецȣріле каре ръsпȣnd ла екўаціїле date sꙟnt орї пȣmерелe раціонале 12 ші 4, saȣ челе іраціонале $\sqrt{55} - 5$ ші $-\sqrt{55} - 5$.

V. Sъ se гъsѣаskъ прецȣріле некȣnoskȣтелор din екўаціїле $x(y+z) = a$; $y(x+z) = b$; $z(x+y) = c$. Sъвꙟршindȣ-se ꙟmmȣлціреа вор еші ȣрmътоареле екўацїї $xy + xz = a$; $xy + yz = b$; $xz + yz = c$. Sȣma ачестор треї екўацїї ꙟmпърцindȣ-se кȣ 2, ва da:

$$xy + xz + yz = \frac{a+b+c}{2},$$ saȣ, маї пе skȣрt,

$xy + xz + yz = S$, кꙟnd adекъ se ва лȣа $\dfrac{a+b+c}{2} = S$.

Skъzindȣ-se акȣm dintр'ачеаstъ екўаціе челе треї dinainte ȣпа dȣпе алta, ва еші:

$yz = S - a$; $xz = S - b$; $xy = S - c$. Ші ачесте треї екўацїї ꙟmmȣлцindȣ-se ꙟntре еле, вор da:

$$x^2 y^2 z^2 = (S-a)\,(S-b)\,(S-c)$$

ші skoціndѹ-se рѫdѫчina

$$xyz = \sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)}.$$

Акѹm va fi

$$\frac{xyz}{yz} = x = \frac{\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)}}{S-a} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S-a}};$$

$$\frac{xyz}{xz} = y = \frac{\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)}}{S-b} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S-b}};$$

$$\frac{xyz}{xy} = z = \frac{\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)}}{S-c} = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S-c}}.$$

VI. Фie date екѹаціiле

$$\frac{xyz}{x+y} = a, \quad \frac{xyz}{x+z} = b, \quad \text{ші} \quad \frac{xyz}{y+z} = c.$$

Ачestea daѹ

$$x+y = \frac{xyz}{a}, \quad x+z = \frac{xyz}{b}, \quad \text{ші} \quad y+z = \frac{xyz}{c}.$$

Adѹnndѹ-se ачeste tpeĭ din ѹpmѫ екѹаціĭ, ші сѹma лор ĭmпѫрцindѹ-se кѹ 2, va еші:

$$x+y+z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)xyz.$$

saѹ maĭ пe skѹpt $x+y+z = Sxyz$, кĭnd se va лѹa $S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Skѫzĭndѹ-se dintp'ачeastѫ dѹпe ѹpmѫ екѹаціe чeлe tpeĭ dinainte ѹna dѹпe aлta, va fi:

$$z = \left(S - \frac{1}{a}\right)xyz; \; y = \left(S - \frac{1}{b}\right)xyz; \; x = \left(S - \frac{1}{c}\right)xyz,$$

ші ачeste tpeĭ екѹаціĭ ĭmmѹлцindѹ-se ĭntpe eлe, daѹ:

$$xyz = \left(S - \frac{1}{a}\right)\left(S - \frac{1}{b}\right)\left(S - \frac{1}{c}\right)x^3y^3z^3, \quad \text{saѹ}$$

$$x^2y^2z^2 = \frac{1}{\left(S-\frac{1}{a}\right)\left(S-\frac{1}{b}\right)\left(S-\frac{1}{c}\right)}, \text{ ші}$$

$$xyz = \frac{1}{\sqrt{\left(S-\frac{1}{a}\right)\left(S-\frac{1}{b}\right)\left(S-\frac{1}{c}\right)}}.$$

Акȣм пȣindȣ-se ачest преџ ла челе tpeĭ екȣаціїй de маĭ sȣs, ꙟn локȣл лȣĭ x, y ші z, ꙟn продȣктȣл xyz, ва fi:

$$x = \sqrt{\frac{S-\frac{1}{c}}{\left(S-\frac{1}{a}\right)\left(S-\frac{1}{b}\right)}}$$

$$y = \sqrt{\frac{S-\frac{1}{b}}{\left(S-\frac{1}{a}\right)\left(S-\frac{1}{c}\right)}}$$

$$z = \sqrt{\frac{S-\frac{1}{a}}{\left(S-\frac{1}{b}\right)\left(S-\frac{1}{c}\right)}}$$

Ачелеаш преџȣрĭ s'ap fi пȣtȣt гъsi ші кꙟnd ꙟn екȣаціїле afлate але проблемелор de маĭ sȣs s'ap fi пȣs ꙟn локȣл літерілор x, y, z, a, b, c fpꙟnџеріле $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$.

Desлегарѣ екȣ̆ацiiлор nехотърɨte.

§. 448. Din екȣ̆ацiĭ nехотърɨte se пот афла прецȣрiле (§. 436.) nȣmaĭ atȣnчĭ, кɨnd nȣmърȣл ачестор екȣ̆ацiĭ вор fi de o потрiвъ кȣ nȣmърȣл некȣnoskȣтелор. Ла ачѣastъ ɨntɨmпларе adeкъ, лепъdɨndȣ-se ȣna dȣпе алта кɨte ȣna din кътiмiле некȣnoskȣte, ɨn sfɨршit se формѣазъ о екȣ̆ацiе каре копрinde nȣmaĭ o некȣnoskȣтъ, ал кърia прец хотърɨndȣ-se dintр'ачѣastъ екȣ̆ацiе, шi sȣбstitȣindȣ-se ɨn челе лалте екȣ̆ацiĭ, se гъсеще шi прецȣл челор лалте некȣnoskȣte. Iар de вор fi date maĭ пȣцiне екȣ̆ацiĭ decɨt некȣnoskȣte, atȣnчĭ екȣ̆ацiа чѣа din ȣрmъ, каре se ва форма прin лепъdарѣа некȣnoskȣтелор, ва копрinde maĭ mȣлt decɨt o некȣnoskȣтъ. Asfeл, sпре пilдъ, din доъ екȣ̆ацiĭ date se поате лепъda nȣmaĭ o некȣnoskȣтъ; кɨnd dap доъ екȣ̆ацiĭ копрind треĭ некȣnoskȣte, atȣnчĭ ɨn екȣ̆ацiа че se ва форма прin лепъdарѣа ȣнеĭ некȣnoskȣte, se вор maĭ копрinde доъ некȣnoskȣte. Акȣm съ аратъм, кȣm требȣе съ se ȣрmeze desлегарѣа, кɨnd ȣn проблем не ва dȣче ла о asemenѣа екȣ̆ацiе nехотърɨтъ.

Екземплȣ

§. 449. Se чер a se хотърɨ прецȣрiле x шi y din екȣ̆ацiа $3x+2y=7$. Акȣm fiind къ ɨnтре x шi y nȣ se афлъ nічĭ о алтъ екȣ̆ацiе, ка прinтр'ачѣа съ se поатъ лепъda ȣna din челе доъ некȣnoskȣte; съ лȣъм пentрȣ ȣna saȣ̆ пentрȣ чѣа лалтъ некȣnoskȣтъ ȣn прец оаре каре; шi fiind къ прin екȣ̆ацiа datъ tot se поате афла о релацiе ɨnтре кътiмiле x шi y, шi dакъ se ва лȣа пentрȣ ȣna din еле ȣn прец оаре-каpe, se поate пріntр'aчesta хотърі ші прецѕл челіїлалte некѕnoskѕte. Адекъ din екѕаціа de maї sѕs se гъseще $x = \frac{7 - 2y}{3}$. Аша dap de вom пѕne

$y =$	-1	0	1	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	шчл.
ва fi $x =$	3	$2\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	-1	шчл.

Dap fiind къ пentpѕ y se поt лѕа o nemъpџinitъ mѕлціme de deoseвite прецѕpї, пozitiве ші negatiве, інtpeцї ші fpінte шчл. ші fieшкаpe de ѕn пpeц ръsпѕnzъtop ла кътimea x, de aчеa екѕаціа $3x + 2y = 7$ поate авea o mѕлціme nemъpџinitъ de desлегъpї. Кѕ toate aчestea de mѕлte opї пѕмъpѕл desлегъpiлop пѕtinчioase este mъpџinit, кінd адекъ кътimiле чe se чep a se afла, аѕ a іmпліnі oape-каpe kondiціі, чe daѕ прецѕpiлop іnsѕшіpї хотъpіte; astfeл spe піldъ кінd x ші y пot fi пѕmaї пѕmepe пozitiве ші інtpeцї.

§. 450. Кінd x ші y вop fi sъ fie пѕmepe пozitiве, atѕпчї tpeвѕe sъ se deoseвeaskъ ѕpmъtoapeле іntімплъpї.

1) De ва fi $x = \frac{by + c}{a}$, se пot лѕа пentpѕ y toate пѕtinчioaseле пѕmepe пozitiве іntpe o ші ∞, пentpѕ къ ла aчeastъ іntімпларе ші пentpѕ x пѕmaї пozitiв пѕmъp se поate doвінdi.

2) De ва fi $x = \frac{by - c}{a}$, ла aчeastъ іntімпларе ѕpmeazъ a fi $y > \frac{c}{b}$, пentpѕ къ x tpeвѕind a fi o

кътime пozitiвъ, ѕрmεazъ ка ші пѕmъръторѕл $by - c$ съ fie ѕп пѕmър пozitiв, ші de ачева $by > c$ ші $y > \frac{c}{b}$. Аша dap ла ачεastъ ꙟпtꙟmпларе se поate лѕа пentpѕ y opĭ каре пѕmър din челе че se вор afла ꙟпtpe $\frac{c}{b}$ ші ∞, ші прецѕл ръспѕпzъ-тop ла x ва fi ші ел пozitiв.

3) Кꙟnd ва fi $x = \frac{c - by}{a}$, atѕпчĭ, ка съ fie ла ачεa-stъ екѕаціе x пѕmър пozitiв, ѕрmεazъ ка ші пѕ-mърътopѕл $c - by$ съ fie пozitiв, ші прin ѕрmаре съ fie $by < c$ ші $y < \frac{c}{b}$. Аша dap se пot лѕа пеn-tpѕ y toate пѕmеріле пozitiве кꙟte вор къdεa ꙟпtpe o ші $\frac{c}{b}$.

§. 451. Кꙟnd ꙟп екѕаціа $ax + by = c$ пекѕпоsкѕ-теле x ші y вор fi пѕmере ꙟпtpeцĭ, atѕпчĭ требѕе maĭ ꙟntꙟĭ съ se вazъ dакъ ꙟпtp'adeвър ачεastъ kondiціе se поate ꙟmплiпі. Съ zічеm къ m este ѕп fъкътop комѕп ал лѕĭ a ші b, прin каре ꙟпсъ c пѕ se поate ꙟmпър-ці, ші fie $a = mf$, $b = mg$; прin ѕрmаре $mfx + mgy = c$, ші $fx + gy = \frac{c}{m}$. Акѕm $\frac{c}{m}$ требѕе съ fie o fpꙟпцере, пentpѕ къ dѕпе sѕпoziціе c ші m sꙟnt пѕmере ꙟпtꙟi oape ꙟпtpe еле; dap sѕma $fx + gy$ пѕ поate fi fpꙟп-цере, кꙟnd x ші y вор fi пѕmере ꙟпtpeцĭ; ші аша е-кѕаціа $fx + gy = \frac{c}{m}$ пѕ поate sta, фъръ de a fi x saѕ y saѕ amꙟndoъ deodatъ fpꙟпцерĭ. Аша dap este

кȣ пепȣtinцъ ка ꙟп екȣаціа $ax+by=c$, ȣnde коп-
фъкъtopiĭ аȣ ȣп фъкътор комȣп, sъ fie кътimiле x ші
y пȣmере ꙟntpeцĭ.

§. 452. Sъ zічem dap къ ꙟп екȣаціа $ax+by=c$
копфъкъtopiĭ a ші b sꙟnt пȣmере ꙟntꙟitoape ꙟntpe еле.
Аша кꙟnd вор fi sъ se гъsѣаskъ пеntpȣ x ші y пȣme-
piĭ ꙟntpeцĭ каре ръsпȣпd ла екȣаціа datъ, аtȣпчĭ
ꙟntꙟmпларѣа чѣа maĭ simпль ва fi, dакъ кътimѣа кȣ-
noskȣtъ c se ва пȣtѣа ꙟmпърці пріп ȣпȣл din копфъ-
кътоpĭ, s. п. пріп a, ші dȣпе ачѣа ва fi пpeцȣл ачещіĭ пе-
кȣпоskȣte, $x=\frac{c-by}{a}=\frac{c}{a}-\frac{by}{a}$. Акȣm fiind къ c se
поаte ꙟmпърці екzакt пріп a, кꙟtȣл ва fi пȣmър ꙟп-
tpeг. Sъ пȣпеm dap $\frac{c}{a}=m$, ші ва fi $x=m-\frac{by}{a}$.
Ка sъ fie ꙟпsъ ші $\frac{by}{a}=m$ пȣmър ꙟntpeг, tpeбȣe sъ
se пȣе ꙟп локȣл лȣĭ y asfел de пȣmере каре se пот
ꙟmпърці пріп a, ші каре тоцĭ se копріnd sȣб форmа
ap, ȣnde p ꙟпфъцішѣаzъ ȣп фъкътор пехотърꙟt. Sъ лȣ-
om dap $y=ap$, ші ва fi $x=m-bp$. Акȣm de se
ва пȣпе ꙟп формеле $x=m-bp$ ші $y=ap$, ꙟп локȣл
лȣĭ p пȣmepiĭ 1, 2, 3, 4 шчл. ȣпȣл dȣпе алtȣл, а-
tȣпчĭ se вор гъsi пеntpȣ x ші y tot atꙟцѣа пȣmepĭ
ꙟntpeцĭ, каре тоцĭ вор ръsпȣnde ла екȣаціа datъ
$ax+by=c$. Asemenѣа se хотъръsk ші пpeцȣpiле пе-
кȣпоskȣtелор каре ръsпȣnd ла екȣаціа $ax-by=c$;
ла ачѣаstъ ꙟntꙟmпларе adекъ ва fi
$x=m+bp$ ші $y=ap$.

Dакъ ла amꙟndoъ ꙟntꙟmпльpiле пpeцȣpiле пекȣпоsкꙋtелор se вор чере a fi нꙋ нꙋmaĭ нꙋmере ꙟntреџĭ, чi шi поzitiве, atꙋnчĭ este de sine ꙟнвеdерat къ пеntрꙋ $y=ap$, ꙟн локꙋл лꙋĭ p нꙋmaĭ нꙋmерĭ поzitiве требꙋе съ se пꙋе. Asemenea ла ꙟntꙟmпларea ꙟntꙟĭ, ꙋnde este $x=m-bp$, ва требꙋi съ fie шi $m>bp$ saꙋ̆ $p<\frac{m}{b}$. Aша dap aiчĭ нꙋmaĭ ꙋн mърџinit нꙋmър de desлегърĭ este пꙋtinчios пеntрꙋ екꙋ̆аџiа $ax+by=c$; шi ꙟнкъ de ва fi $b>m$, saꙋ̆ $1>\frac{m}{b}$, прin ꙋрmаре шi $1>p$, atꙋnчĭ ва fi кꙋ непꙋtinџъ a se faче вре o desлегаре ачещiĭ екꙋ̆аџiĭ прin нꙋmерĭ ꙟntреџĭ.

Ла ꙟntꙟmпларea a doъa, ꙋnde este $x=m+bp$, преџꙋрiле пеntрꙋ p, adeкъ 1, 2, 3 шчл. пot съ креаskъ nemърџinit, фъръ de a авеа x алt преџ deкꙟt поzitiв, aша dap пеntрꙋ екꙋ̆аџiа $ax-by=c$ este ꙋн nemърџinit нꙋmър de desлегърĭ пꙋtinчioase.

Екzemпле

I. Фie $2x+3y=8$, aша dap $x=4-\frac{3y}{2}$. Съ пꙋnem $y=2p$, aша ва fi $x=4-3p$, шi de ва fi $p=1$, atꙋnчĭ ва fi $x=4-3=1$ шi $y=2$. Iap ꙋн maĭ mape преџ, deкꙟt 1, пеntрꙋ p нꙋ este пꙋtinчios, пеntрꙋ къ atꙋnчĭ $4-3p$, шi прin ꙋрmаре шi x, ap требꙋi съ fie negatiв. Aша dap пеntрꙋ екꙋ̆аџiа $2x+3y=8$, daкъ x шi y вор требꙋi съ fie нꙋmерĭ поzitiвĭ, нꙋmaĭ o desлегаре este пꙋtinчioasъ, adeкъ $x=1$ шi $y=2$.

II. Фie екꙋ̆аџiа $7x+5y=145$, aша dap $y=29-\frac{7x}{5}$, шi пꙋindꙋ-se $x=5p$, ва fi $y=29-7p$, ꙋnde atꙋnчĭ tpeбȣe sъ fie $p<\frac{29}{7}$ saȣ̆ $p<4\frac{1}{7}$; аша прецȣл чел маĭ mape пе каре поate sъ'л аĭбъ p, este $p=4$, ші пentpȣ екȣ̆ацiа datъ sȋnt нȣmaĭ ȣpmътoapeлe desлегърĭ пȣtinчioase, adeкъ;

пentpȣ $p=1$ ва fi $x=5$ ші $y=22$;
» $p=2$ » $x=10$ » $y=15$;
» $p=3$ » $x=15$ » $y=8$;
» $p=4$ » $x=20$ » $y=1$.

III. Фie $9x-13y=9$, аша dap $x=1+\frac{13y}{9}$. Aiчĭ dap tpeбȣe sъ fie $y=9p$, пpin ȣpmape $x=1+13p$. Ла ачest екzemплȣ p поate креще de ла ȣniime пънъ ла nemъpцinit нȣmър, ші atȋt пentpȣ y кȋt ші пentpȣ x tot прецȣрĭ пozitiвe se пot гъsi; аша дар екȣ̆ацiа $9x-13y=9$ аре ȣп nemъpцinit пȣmър де деслегърĭ пȣtinчioace; adeкъ:

пentpȣ $p=1$ ва fi $x=14$ ші $y=9$;
» $p=2$ » $x=27$ » $y=18$;
» $p=3$ » $x=40$ » $y=27$;
» $p=4$ » $x=53$ » $y=36$ шчл.

§. 453. Iap dакъ ȋп екȣ̆ацiа $ax\pm by=c$ кътimea чea кȣnoskȣtъ c пȣ se ва пȣtea ȋmпърцi пpin копfъкъtopȣл вpe ȣпеĭ пекепoskȣte, atȣпчĭ desлeгapea ва fi maĭ ȋпкȣpкatъ ші maĭ апевое, dap se поate фаче dȣпе ачелеаш пpinцinȣpĭ аpъtate ла параграfȣл 452. Ачeasta se ва аpъta ші пpin ȣpmъtoapeлe екzemпле.

I. Фpȋпцepea $\frac{19}{35}$ sъ se desfакъ ȋп doъ fpȋпцepĭ $\frac{x}{7}$ ші $\frac{y}{5}$, asfeл ȋпкȋt sъ fie $\frac{x}{7}+\frac{y}{5}=\frac{19}{35}$.

Ачeastъ екȣ̆ацie skъпȋпdȣ-se de fpȋпцepĭ, dъ

$5x+7y=19$, de ѕnde $x=\frac{19-7y}{5}$ saѕ̆

$$x=3+\frac{4}{5}-y-\frac{2y}{5}.$$

Акѕm de se ва пѕne $\frac{4}{5}-\frac{2y}{5}=\frac{4-2y}{5}=p$, ші se ва хотърі dintр'ачеastъ dѕne ѕртъ екѕ̆ацiе пекѕno-sкѕta y, se ва гъsi $y=\frac{4-5p}{2}=2-\frac{5p}{2}$, ші пѕind $p=2q$, ка sъ ne апъръm de fрінцере, вom авеа $y=2-5q$. Ачeste пpeцѕpĭ ін sfіpшit пѕin-dѕ-se ін локѕл лѕĭ p ші y ін екѕ̆ацia $x=3-y+p$, ва еші $x=3-2+5q+2q=1+7q$. Акѕm fiind къ ачeste пpeцѕpĭ aflate пeнtpѕ x ші y пѕmaĭ ко-npind fpінцерĭ, dакъ ін екѕ̆ацiiле $x=1+7q$ ші $y=2-5q$ se вop пѕne ін локѕл лѕĭ q opĭ каре пѕmepĭ інtpeцĭ, se вop гъsi ші пeнtpѕ x ші y tot пѕmepĭ інtpeцĭ каре вop ръsпѕnde ла екѕ̆ацia $5x+7y=19$; dap fiind къ ін пpoблemѕл dat пpe-цѕpiле лѕĭ x ші y тpeбѕe sъ fie ші nozitiве, ші a-чeasta пѕmaĭ atѕнчĭ este кѕ пѕtinцъ кіnd se ва лѕа $q=0$, de ачееа ші пeнtpѕ ачest пpoблem ва fi пѕmaĭ o singѕръ desлeгаpe пѕtinчioasъ, adeкъ: $x=1$ ші $y=2$, ші $\frac{19}{35}=\frac{1}{7}+\frac{2}{5}$.

II. Sъ se гъseaskъ ѕn пѕmъp, каре sъ se поatъ ім-пърці кѕ 5, dap імпърцindѕ-se кѕ 23 sъ dea ръ-mъшiцъ 11.

Фie пѕmъpѕл чepѕt n, ші пeнtpѕ kondiцia dintіĭ ва fi $5x=n$; іаp пeнtpѕ a doъa kondiцie $n=23y+11$;

прin ѕрmаре $5x=23y+11$, шi

$$x=\frac{23y+11}{5}=4y+\frac{3y}{5}+2+\frac{1}{5}=4y+2+p,$$

dакъ вом пѕне $\frac{3y+1}{5}=p$. Dintр'ачѣastъ dѕпе ѕр-

mъ екѕаціе se ва гъsi $y=\frac{5p-1}{3}=p+\frac{2p-1}{3}=p+q$,

dакъ ıаръш se ва пѕне $q=\frac{2p-1}{3}$, каре екѕа-

ціе ıаръш ва da прецѕл лѕї p, adекъ

$p=\frac{3q+1}{2}=q+\frac{q+1}{2}=q+r$, лѕтndѕ-se

$\frac{q+1}{2}=r$ saѕ $q=2r-1$. Акѕm fiind къ ачest din ѕрmъ прец ал лѕї q пѕmаї копрinde вре о frтнціере, se вор къѕta a se хоtърт прецѕріле лѕї x шi y прin кıар ачest прец ал лѕї q, шi тnsъ прекѕm ѕрmѣazъ:

$q=2r-1$;

$p=q+r=3r-1$;

$y=p+q=3r-1+2r-1=5r-2$;

$x=4y+2+p=20r-8+2+3r-1=23r-7$.

Dакъ пеntрѕ x шi y вом пѕне прецѕріле aflate орї тn екѕаціа $n=5x$ saѕ тn $n=23y+11$, вом гъsi $n=115r-35$ sѕб ачѣastъ formѕлъ se копрind тоції пѕmерії, каре aѕ тnsѕшіріле черѕte, шi каре se вор afла dакъ se вор пѕне тn локѕл лѕї r пѕ-mерії 1, 2, 3 ... тn крещере петърціnitъ. Аша dар чел mаї mік пѕmър каре тmплinеще пропѕsa кон-diціе, se ва пѕtѣа гъsi, dакъ se ва пѕне $r=1$. Ачел пѕmър ва fi $=115-35=80$.

III. Sъ se каȣte doъ нȣмере, але кърора sȣме sъ fiе de o потрiвъ кȣ а шасеа парте а продȣктȣлȣї лор, аша dар $x+y=\frac{xy}{6}$. Dintр'ачеаstъ екȣаціе ꙗsъ $6y=xy-6x$ ші $x=\frac{6y}{y-6}$, saȣ̆ фъкѫndȣ-se ѫmпърціреа: $x=6+\frac{36}{y-6}=6+p$, dакъ se ва sокоti а fi $\frac{36}{y-6}=p$. Ачеаstъ dȣпе ȣрmъ екȣаціе dъ ꙗръш $y=\frac{36}{p}+6$ saȣ̆ $y=6+q$, лȣѫndȣ-se $q=\frac{36}{p}$, прin ȣрmаре $pq=36$. Sъ se desfaкъ dар 36 ѫn doї фъкъtорї p ші q, ші sъ se пȣе $x=6+p$ ші $y=6+q$. 36 ѫnsъ se поate ѫmпърці екzакt прin нȣмерiї 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ші 36; dакъ dар se ва sокоti къ este

$p=$	1	2	3	4	6	9	12	18	36
ва fi ші $q=$	36	18	12	9	6	4	3	2	1
прin ȣрmаре $x=$	7	8	9	10	12	15	18	24	42
ші $y=$	42	24	18	15	12	10	9	8	7

Аша dар пentрȣ проблемȣл de maї sȣs sѫnt 5 desлегърї пȣtinчioase; аdекъ:

1) $x=7$, $y=42$
2) $x=8$, $y=24$
3) $x=9$, $y=18$
4) $x=10$, $y=15$
5) $x=12$, $y=12$.

De progresiĭ aritmetiче saŭ шirȣrĭ.

§. 454. **Progresie aritmetikъ** este ȣn шir de nȣmerĭ, ȣnde fie kare nȣmър ȣrmъtor se deosebeще de чел dinaintea ачestȣia kȣ tot atъtea ȣnimĭ; прекȣm sъnt nȣmeriĭ 1, 3, 5, 7, 9, 11 шчл. ȣnde fie kare nȣmър ȣrmъtor este kȣ doъ ȣnimĭ maĭ mare de kъt чел dinaintea luĭ, 18, 15, 12, 9, 6, 3 шчл. ȣnde fie kare nȣmър ȣrmъtor este kȣ treĭ ȣnimĭ maĭ mik.

§. 455. Фiind kъ dar la o progresie aritmetikъ fie kare doĭ terminĭ kare ȣrmeazъ ȣnȣl dȣпе altȣl daŭ ачeaш diferenцъ, va fi шi пропорцia aritmetikъ ъntre doĭ terminĭ kare ȣrmeazъ ъndatъ ȣnȣl dȣпе altȣl tot ачeaш, шi fie kare dintr'ачeĭ terminĭ va fi nȣmърȣl чел de miжлok aritmetiчеще пропорцional ъntre terminȣl anteчedent шi ъntre чел konsekȣent. Aшa va fi ъn eksemплȣl din tъĭ al paragrafȣlȣĭ 454. 1 ÷ 3 = 3 ÷ 5 = 5 ÷ 7 = 7 ÷ 9 шчл. Diferenцa komȣnъ a tȣtȣror ачestor пропорцiĭ se va гъsi, dakъ se va skъdea mъkar kare termin din чел maĭ de aproape ȣrmъtor: Aшa dar kъnd vor fi kȣnoskȣцĭ doĭ terminĭ aĭ ȣneĭ progresiĭ, nemiжločit ȣrmъtorĭ ȣnȣl dȣпе altȣl, se va пȣtea ъntinde ачeastъ progresie ъnainte saŭ ъndъrъt orĭ kъt va voi чineva; fie sпре пildъ 7 шi 9 doĭ de ачeщĭ terminĭ, пrin ȣrmare diferenцa komȣnъ = 2, aшa progresia ръsпȣnzъtoare la ачeasta va fi: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 шчл.

§. 456. Фie ъntъiȣl termin al ȣneĭ progresiĭ aritmetiче a, diferenцa d, aшa va fi:

$$\text{ал doiлѣa tepmin} = a + d,$$
$$\text{ал tpeiлѣa} \quad » \quad = a + 2d,$$
$$\text{ал пatpȣлѣa} \quad » \quad = a + 3d,$$

шчл.

Іap dakъ tepminiĭ пpoгpesieĭ вop mepџe skъzindȣ-se, вa fi

$$\text{ал doiлѣa tepmin} = a - d,$$
$$\text{ал tpeiлѣa} \quad » \quad = a - 2d,$$
$$\text{ал пatpȣлѣa} \quad » \quad = a - 3d,$$

de ȣnde ȣpmѣazъ, къ toцĭ tepminiĭ ȣneĭ пpoгpesiĭ kpeskъtoape, daȣ пe aчeѣaш tepminĭ aĭ ȣneĭ пpoгpesiĭ des kpeskъtoape, dakъ nȣmaĭ лi se вa skimбa semnȣл difepenцiĭ ꙟn чeл ꙟmпpotiвitop.

Sъ se skpie dѣasȣпpa tepminiлop пpoгpesieĭ apъtъtopĭ, adekъ nȣmepe kape sъ apate aл kꙟteлѣa tepmin ꙟn пpoгpesie este fie kape, шi aшa se вa пȣtѣa ꙟnfъцiшa ꙟn deoбшe opĭ kape пpoгpesie apitmetikъ dȣпe kiпȣл ȣpmъtop:

apъtъtopĭ	1	2	3	4	5	
tepminĭ	a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$	шчл.

De se вa чepчeta kȣ лȣape aminte aчest шip, se вa гъsi къ fie kape tepmin aл sъȣ este sȣma din tepminȣл ꙟntꙟi a, шi din difepenцa d ꙟmmȣлцitъ kȣ apъtъtopȣл sъȣ skъzȣt de o ȣnime. Dꙟndȣ-se dap tepminȣл чeл din tꙟĭ шi difepenцa, se пoate xotъpꙟ opĭ kape aлt tepmin x, kȣ apъtъtopȣл m; вa fi adekъ $x = a + (m-1)d$, kape esпpesie se nȣmeшe tepminȣл џenepaл aл пpoгpesieĭ. Sпpe пiлdъ nȣmepiĭ fъpъ soц 1, 3, 5, 7 шчл. fopmѣazъ o пpoгpesie apitmetikъ, ꙟn kape tepminȣл ꙟntꙟĭ este $a = 1$, difepenцa $d = 2$, пpin ȣpmape esпpesia џenepaлъ пentpȣ fie kape tepmin:

$x = 1 + 2(m-1) = 2m - 1$. aшa dap aл sȣteлѣa nȣ-нꙋмър гърꙟ soц este $=200-1=199$, ал кървиа аръtъtop este $m=100$.

§. 457. Фiind къ fie каре tepmin ал прогресieї se ꙟnfъцiшeazъ прin $a+(m-1)d$, прintp'ачeasta se поate кꙋноаще dакъ ꙋn нꙋмър dat k este ꙋn tepmin ал вре ꙋнеї прогресiї, шi каре este аръtъторꙋл сьꙋ, saꙋ ал кꙟteлea este ачел tepmin ꙟn прогресie.

Sъ se пꙋе adeкъ $k=a+(m-1)d$, прin ꙋрmаpe $m=\frac{k-a}{d}+1$. Акꙋm fiind къ m, ка аръtъtop, требꙋе sъ fie ꙋn нꙋмър ꙟntpeг, k нꙋ ва пꙋtea sъ fie tepmin ал вре ꙋнеї прогресiї, dакъ $k-a$ нꙋ se ва пꙋtea ꙟmпърцi кꙋ d. Astfeл s. п. нꙋмърꙋл 102 ва fi ал вiнчiспрезечелea tepmin ал прогресieї, ꙟn каре tepminꙋл чел din tꙟї este 32, шi diфepeнцa 5; кꙟчї $m=\frac{102-32}{5}+1=15$.

§. 458. Espresia ценераль пentpꙋ opї каре tepmin ал ꙋнеї прогресieї sкъzъtoape este $x=a-(m-1)d$, пentpꙋ къ aiчї diфepeнцa требꙋе sъ se sкаzъ. Кꙟnd tepminꙋл чел din tꙟї a se ва пꙋtea ꙟmпърцi кꙋ diфepeнцa d, atꙋнчї ꙋn tepmin opї каре dintp'o asemeнea прогресie sкъzъtoape este $=0$. Фie ачesta tepminꙋл ал $m^{лea}$, прin ꙋрmаpe $a-(m-1)d=0$, de ꙋnde ese $m=\frac{a}{d}+1$. S. п. ꙟn прогресia 54, 51, 48 шчл. ал поъsпрезечелea tepmin ва fi $=0$; adeкъ $m=\frac{54}{3}+1=19$. Iap tepminiї ꙋрmъtopї вор fi неratiвї, прекꙋm $-3, -6, -9$, шчл.

§. 459. Ꙟntpe doъ нꙋмepe date f шi g se поate бъгa opї каре нꙋмър de tepminї, каре sъ фopmeze кꙋ амѫndoĭ терminiĭ чеĭ de марџine f шi g o прогресiе арiтmetiкъ. Sъ ziчem s. п. къ h este нѫmърѫл терminiлор че sѫnt a se бъга ла miжлок, шi ва fi $h+2$ нѫmърѫл терminiлор din toatъ прогресiа, пentрѫ къ пе лѫngъ терminiĭ че se багъ ла miжлок нѫmърѫndѫ-se шi чеĭ doĭ de марџine se formеazъ шiрѫл ѫntреg ал прогресiеĭ. De вom пѫne dар ѫn formѫла џенерaлъ de maĭ sѫs арътatъ $x=a+(m-1)d$ кътimеa $a=f$, $m=h+2$ шi $x=g$, вom авеа $g=f+(h+1)d$, прin ѫрmаре $d=\frac{g-f}{h+1}$. Iар dакъ пе лѫngъ терminѫл din tѫĭ ва fi кѫnoskѫtъ шi diferenџa, atѫnчĭ se пot хotърѫ шi чеĭ лалцĭ терminĭ. Dакъ ва треbѫi sъ se баџе ѫn терmin ѫntре f шi g, se ва пѫne $h=1$; ашa dар $d=\frac{g-f}{2}$, шi терminѫл чел бъгat ла miжлок ва fi $=f+\frac{g-f}{2}=\frac{f+g}{2}$.

De вор fi doĭ терminĭ a se бъга ѫntре f шi g, se ва пѫne $h=2$, ашa dар $d=\frac{g-f}{3}$, шi ѫntѫiѫл терmin че se чере a se бъга ѫntре чеĭ арътaцĭ ва fi $=f+\frac{g-f}{3}=\frac{2f+g}{3}$; ал doĭлеа терmin ва fi $=\frac{2f+g}{3}+\frac{g-f}{3}=\frac{f+2g}{3}$.

§. 460. Фie a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ шчл. o прогресiе кресkътoаре, ал кърia терmin џенерал este $x=a+(m-1)d$. Sъ se ziкъ z терminѫл чел dѫпе ѫрmъ ал ачещiĭ прогресiĭ, шi ва fi, ѫntoркѫndѫ-se шiрѫл терminiлор, z, $z-d$, $z-2d$, $z+3d$ шчл. o прогресiе арiтmetiкъ sкъzътoаре, a кърia diferenцъ este $= -d$, ші ал къріа термін чел din ѫрмъ este $= a$; пріп ѫрмаре еспресіа џенералъ пентрѫ fie каре термін ва fi $y = z - (m - 1)d$.

Съ zічем акѫм къ x ші y sѫnt doї терміні de о нотрівъ депъртаці de чел dintѫї ші de чел dѫпе ѫрмъ термін, ші къ амѫndoї ачещї терміні аѫ арътъторѫл m, атѫнчї ва fi:

$$x = a + (m - 1)d, \text{ ші}$$
$$y = z - (m - 1)d, \text{ пріп ѫрмаре}$$
$$\text{ва fi } x + y = a + z$$

Аша dap ѫn fie каре прогресіе арітметікъ сѫма а доï терміні оаре каре de о нотрівъ депъртаці de чеї de марџіne, este tot деаѫна ачеаш, ші de о нотрівъ кѫ сѫма форматъ din термінѫл dintѫї кѫ чел din ѫрмъ. Аша este s. n. ѫn прогресіа, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 сѫма $1 + 17 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 18$; dap fiind къ нѫмърѫл терміnілор ѫntр'ачест шір este fъръ соц, термінѫл чел din міжлок, ка de о нотрівъ депъртат de чел din тѫї ші de чел din ѫрмъ термін, лѫѫndѫ-se ѫndoit ва fi de о нотрівъ іаръш кѫ ачеаш сѫмъ, прекѫм $9 + 9 = 18$.

§. 461. Din пропріетатеа прогресіілор арітметіче арътатъ ѫn параграфѫл de маї сѫс se гъсеще кіпѫл dѫпе каре se поате афла сѫма тѫтѫрор терміnілор ѫнеї асеменеа прогресії.

Фіе a термінѫл чел dintѫї, z чел dѫпе ѫрмъ, ші d діференца ѫнеї прогресії арітметіче. Акѫм de se вор адѫна термініï dела чел dintѫї пѫнъ ла чел dѫпъ ѫрмъ, saѫ dела чел din ѫрмъ пѫнъ ла чел dintѫї, сѫма ва fi tot ачеаш. Нѫмінdѫ-se dap сѫма ачещії прогресії s, ва fi

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) \ldots + z, \text{ ші іаръш}$$
$$s = z + (z + d) + (z - 2d) + (z + 3d) \ldots + a.$$

Ꙟn amꙟndoъ екꙋaціiʌe вin ʌa ачеʌаш ʌок tepmi-
нiї каpe se afʌъ de o потpiвъ denъptaцї de чеї de
маpџine, ші dѹnе кѹm s'a аpъtat ʌa §. 460, sѹma a-
чеʌоp tepminї este $= a + z$. Adѹnꙟndѹ-se dap amꙟn-
doъ екꙋaціiʌe, ва fi:

$$2s = (a + z) + (a + z) + (a+z) + (a + z) \ldots + (a+z).$$

De ѹnde se веde къ sѹma $(a + z)$ se adaorъ de atꙟtea
opї, кꙟцї tepminї sꙟnt ꙟn пpогpesie. De se ва ʌѹa
dap n dpept нѹmъpѹʌ tepminiʌop, ва fi

$$2s = n(a + z) \text{ ші } s = \frac{n}{2}(a + z).$$

Аша dap sѹma ѹнеї пpогpesiї apitmetiче este de
o потpiвъ кѹ sѹma fopmatъ din tepminѹʌ чеʌ dintꙟї,
кѹ чеʌ din ѹpmъ, ꙟmmѹʌцitъ кѹ жѹmъtate нѹmъpѹʌ
tepminiʌop; saѹ este de o потpiвъ кѹ жѹmъtate sѹma
fopmatъ din tepminѹʌ dintꙟї кѹ чеʌ din ѹpmъ, ꙟn-
mѹʌцitъ кѹ нѹmъpѹʌ tepminiʌop. S. п. se чеpe sѹ-
ma нѹmepiʌop fipeщї deʌa 1 пꙟнъ ʌa 100; adeкъ
sѹma tepminiʌop пpогpesieї $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 100$.
Aiчї este $a = 1$; $z = 100$; $n = 100$; аша dap

$$s = \frac{1}{2}(1 + 100)\,100 = 5050.$$

§. 462. Nѹmъpѹʌ tepminiʌop ꙟn пpогpesie, каpe
ʌa паpагpafѹʌ de maї nainte s'a нѹmit n, ва fi ші a-
pъtъtop tepminѹʌѹї чеʌѹї din ѹpmъ z, de ѹnde ѹp-
meazъ $z = a + (n - 1)d$.

§. 463. Екꙋaціiʌe afʌate ʌa §. 461. ші §. 462.

$$\text{I)}\quad z = a + (n - 1)d \text{ ші}$$

$$\text{II)}\quad 2s = n\,(a + z)$$

копpind чiнчї кътimї че sꙟnt a se хотъpꙟ, ші каpe a-
tꙟpнъ ѹna de aʌta, a, d, n, z ші s, din каpe чеʌе
tpeї кътimї a, n, z se afʌъ ꙟn amꙟndoъ екꙋaціiʌe.

Dap din doъ екȣаціï, каре копрind ачеѣаш некȣноскȣтъ, se noate fopma ȣna sinгȣръ ꙟn каре съ нȣ se маï афле ачеаstъ некȣноскȣтъ; аша dap din челе doъ de маï sȣs екȣаціï se пот fopma tpeï алтеле, din каре чѣа din tîï нȣ ва копрinde nічï ȣн a, чѣа de ал doïлѣа nічï ȣн n, чѣа de ал tpeïлѣа nічï ȣн s. Ка съ se dѣа ла о napte a, se ва нȣне ꙟn локȣл лȣï ꙟn a doъа екȣаціе прецȣл aflat ꙟn чѣа din tîï $a = z - (n - 1)d$, ші ва fi:

$$\text{III)}\quad 2s = n[2z - (n - 1)d].$$

Ка съ se dѣа n ла о napte, se ва кътtа іаръш прецȣл лȣï din екȣаціа чѣа dintîï, adeкъ $n = 1 + \frac{z - a}{d}$; dȣпе ачеѣа se ва нȣне ачеst прец ꙟn локȣл лȣï n ꙟn adoъа екȣаціе, ші ва fi $2s = \left(1 + \frac{z - a}{d}\right)(a + z)$, ші ꙟmмȣлцindȣ-se toatъ екȣаціа кȣ d, ва da

$$\text{IV)}\quad 2ds = (z + a)(z - a + d).$$

ꙟn sfꙟpшit ка съ se dѣа ла о napte z, se ва нȣне ꙟn a doъа екȣаціе прецȣл лȣï aflat din екȣаціа чѣа dintîï, ші ва fi:

$$\text{V)}\quad 2s = n[2a + (n - 1)d].$$

§. 464. Фіе каре dintp'ачеste чinчï екȣаціï але napaгpafȣлȣï de маï nainte копрinde natpȣ кътimï nехотъpîte; se поате dap din fie каре съ se fopmeze natpȣ екȣаціï, ші fieш каре dintp'ачеstѣа съ esпpime прецȣл ȣnia din челе natpȣ кътimï npin челе лалте tpeï.

Asfeл іасъ din екȣаціа I) челе natpȣ ȣрмътоape:

1) $a = z - (n - 1)d.$

2) $d = \frac{z - a}{n - 1}.$

3) $n = \frac{z - a}{d} + 1.$

4) $z = a + (n - 1)d.$

Din екѣаціа II):

5) $a = \frac{2s}{n} - z.$

6) $n = \frac{2s}{a + z}.$

7) $z = \frac{2s}{n} - a.$

8) $s = \frac{1}{2}n(a + z).$

Din екѣаціа III):

9) $d = \frac{2(nz - s)}{n(n - 1)}.$

10) $n = \frac{2z + d}{2d} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{2z + d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}.$

11) $z = \frac{2s + n(n - 1)d}{2n}.$

12) $s = \frac{1}{2}n\,[2z - (n - 1)d].$

Din екѣаціа IV):

13) $a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds\right)}.$

14) $d = \frac{(z + a)\,(z - a)}{2s - z - a}.$

15) $z = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds\right)}.$

16) $s = \frac{(z + a)\,(z - a + d)}{2d}.$

Din екѣаціа V):

17) $a = \frac{2s - n(n - 1)d}{2n}.$

18) $d = \frac{2(s - an)}{n(n - 1)}.$

19) $n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 + \frac{2s}{d}\right)}$.

20) $s = \frac{1}{2} n [2a + (n-1)d]$.

Dakъ dap din чeлe чinчĭ kъtimĭ *a*, *d*, *n*, *z* шi *s* вop fi tpeĭ kȣnoskȣte, se вop пȣtea afлa шi чeлe лaлte doъ пpin ekȣaцiiлe de maĭ sȣs apъtate.

Taблa ȣpmъtoape apatъ ekȣaцiiлe kape pъsпȣnd лa opĭ kape kondiцie datъ, ꙟsemnꙟnd *a* tepminȣл ꙟntꙟĭ aл пpogpesieĭ, *d* difepenцa, *n* нȣmъpȣл tepminiлop, *z* tepminȣл чeл din ȣpmъ шi *s* sȣma tȣtȣpop tepminiлop.

Kъtimĭ date	Kъtimĭ чepȣte	Ekȣaцiĭ
a, *d* *n*	*z* *s*	4 20
a, *d*, *z*	*n* *s*	3 16
a, *d*, *s*	*n* *z*	19 15
a, *n*, *z*	*d* *s*	2 8
a, *n*, *s*	*d* *z*	18 7
a, *z*, *s*	*d* *n*	14 6
d, *n*, *z*	*a* *s*	1 12
d, *n*, *s*	*a* *z*	17 11
d, *z*, *s*	*a* *n*	13 10
n, *z*, *s*	*a* *d*	5 9

De пꙋmepĭ fiгꙋpaцĭ.

§. 465. Nꙋmepĭ fiгꙋpaцĭ sɪnt шipꙋpĭ, ɪn каpe tot пꙋmъpꙋл ape atɪtea ꙋnimĭ, din кɪte пꙋntꙋpĭ se поate алкътꙋi tot dеaꙋna ачелаш полiгon pегꙋлat; s. п. tot tpiꙋnгюpĭ, saŭ пътpatꙋpĭ, saŭ пentaгoane pегꙋлate, шi алte maĭ mꙋлte. Фie шipꙋл пꙋmepiлop natꙋpaлĭ, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... n, ꙋnde $d = +1$. Dакъ акꙋm se вop adꙋna doĭ, tpeĭ, natpꙋ tepminĭ aĭ ачещiĭ пpoгpesiĭ, se ва fopma ꙋn алt шip de пꙋmepĭ, aĭ къpopa tepminĭ, че вop ꙋpma ꙋnꙋл dꙋпe алtꙋл, пpeкꙋm 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 ... вop fi пꙋmepĭ din каpe se fopmeazъ tpiꙋnгюpĭ, saŭ fiгꙋpĭ tpiꙋnгюлape, шi ал къpopa fie каpe tepmin de ал $n^{лea}$ pɪnd este tot dеaꙋna de o potpiвъ кꙋ sꙋma ꙋnꙋĭ пꙋmъp de n tepminĭ din шipꙋл пꙋmepiлop natꙋpaлĭ; пpin ꙋpmape

$= \frac{1}{2} n(n-1)$ §. 461.

Asfeл este s. п. ал шaпteлea пꙋmъp tpiꙋnгюлap

$= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$.

De вom вoi sъ щim, dакъ ꙋn пꙋmъp dat a este ꙋn пꙋmъp tpiꙋnгюлap, sъ пꙋnem $\frac{n(n-1)}{2} = a$, шi

atꙋnчĭ $n = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+8a)} - 1\right]$ тpeбꙋe sъ fie ꙋn пꙋmъp ɪntpeг; s. п. fie $a = 703$, шi se ва гъsi $n = 37$; аша dap 703 este ал шaпtezeчĭ шi tpeĭлea пꙋmъp tpiꙋnгюлap ɪn шipꙋл ачestop пꙋmepĭ. Iap dакъ пentpꙋ n ва eшi ꙋn пꙋmъp ipaцionaл saŭ fpɪnt, atꙋnчĭ ачesta ва fi ꙋn semn, къ a пꙋ se кoпpinde ɪn шipꙋл пꙋmepiлop tpiꙋnгюлape.

§. 466. Прогресia apitmetiкъ 1, 3, 5, 7, 9, 11..., ꙟn каре терminiĭ креsк кꙋ doъ ꙋnimĭ, аре dрепt терmin џенерал $2n-1$. De se вор adꙋna doĭ, треĭ, патрꙋ шчл. терminĭ аĭ ачещiĭ прогресiĭ, ва еші ꙋрmъторꙋл шip de nꙋmepe: 1, 4, 9, 16, 25, 36..., каре se nꙋmesк nꙋmepe de пътрate saꙋ̆ патрꙋnгꙋларе, ші терminꙋл џенерал ал ачestꙋĭ шip este ꙟаръш sꙋma n a терmini-лор прогресiеĭ, прin ꙋрmарe $=\frac{1}{2}n(1+2n-1)=n^2$ (§. 461). Dintр'ачeasta ꙋрmeazъ, къ ші sꙋмеле de n nꙋmepe fъpъ soц, ꙟнчепꙟnd дела ꙋnime, sꙟnt $=n^2$.

§. 467. Фie прогресiiле apitmetiче, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19...., ꙋnde $d=3$ ші fie каре терmin $=1+3(n-1)$. De se вор лꙋа ші аiчĭ, ка маĭ sꙋs, sꙋмеле de 2, 3, 4, 5 терminĭ шчл., ва еші о sepie de nꙋmepe пentaгonале saꙋ̆ чiнчĭ-ꙋnгꙋларе: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70..., ꙟn каре шip ꙟаръш терminꙋл џенерал este sꙋma n a терminiлор прогресiеĭ 1, 4, 7... шчл.; прin ꙋрmарe $=\frac{1}{2}n(1+3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$ §. 461.

§. 468. Фie акꙋm ꙟn џенерал прогресia: 1, $1+m$, $1+2m$, $1+3m$ шчл., ꙋnde diфepenца este $=m$, ші ал $n^{\text{лea}}$ терmin $=1+m(n-1)$. Sꙋma de n терminĭ аĭ ачещiĭ прогресiĭ ва fi $=\frac{1}{2}n(2+mn-m)=\frac{mn^2-(m-2)n}{2}$.
Dꙋпе ачeasta de se ва пꙋne ꙟntр'ачeastъ fopmъ џенера-лъ пentpꙋ nꙋmepiĭ полiгonалĭ $m=1$; $m=2$; $m=3$ шчл., вор еші deosebiтеле fopme пentpꙋ nꙋmepiĭ тpiꙋn-гꙋларĭ, (§. 465), патрꙋnгꙋларĭ (§. 466), чiнчĭ-ꙋnгꙋ-ларĭ (§. 467) шчл.; прin ꙋрmарe daкъ h ꙟnsemneа-zъ nꙋmъpꙋл ꙋnгꙋрiлор, каре dъ nꙋmipe ачestор nꙋ-mepĭ fiгꙋраці, ва fi tot deaꙋna $m=h-2$. De ачea

tot черꙋтꙋл нꙋмър полігонал se поate ꙟфъцiша шi прiн formꙋла $\frac{(h-2)n^2-(h-4)n}{2}$, ꙟн каре літера n ꙟnsemneazъ ал кꙟтелеа оаре каре нꙋмър fiгꙋрat se афлъ ꙟн рꙟndꙋл шiрꙋлꙋї sъꙋ. S. п. Dакъ se ва чере ал шаптелеа нꙋмър ексагонал, ва требꙋї sъ se пꙋе $h=6$ шi $n=7$, шi ва fi нꙋмърꙋл черꙋт $=\frac{4 \cdot 7^2-2 \cdot 7}{2}=2 \cdot 49-7=91$.

De прогресiї џеометрiче.

§. 469. **Прогресie џеометрiкъ** este ꙋн **шiр de нꙋмерї, каре tot dеаꙋна ꙟнtр'ачеeаш пропорцie џеометрiкъ креsк saꙋ descresк.** О asemenea прогресie formеазъ s. п. нꙋмерiї 1, 2, 4, 8, 16, 32 шчл., ꙋnde нꙋмърꙋл ꙋрmъtор este tot dеаꙋna ꙟndoit декꙟt чел dinaintea лꙋї. Asemenea este шi 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ шчл. ꙋн шiр џеометрiк, ꙟн каре tot терminꙋл este о атреiа парte din чел dinaintea лꙋї. Ачеаstъ континꙋъ пропорцie џеометрiкъ se арatъ кꙋ semnꙋл а doъ пꙋнtꙋрї пꙋse ꙟntре терminї.

§. 470. Фie $a:b:c:d:e:f\ldots$ шчл. о прогресie џеометрiкъ, шi вом авеа dꙋпе §. 469

$a:b=b:c=c:d=d:e=e:f$ шчл. Аша dар tot терminꙋл este ꙋн нꙋмър de мiжлок џеометрiчеще пропорцiонал ꙟntре антечеdent шi ꙟntре консеквенt.

§. 471. Ꙟнtр'ачееаш прогресie а параграфꙋлꙋї de маї sꙋs ва fi iаръш $a:b=a:b$ шi

$$\begin{array}{r} a:b=b:c \\ \hline \text{аша dар}\quad a^2:b^2=a:c. \end{array}$$

Adeкъ ꙟn fie каpe пpoгpesie џeometpiкъ tepminȣл чeл dintꙟĭ se ape кътpe чeл de aл tpeĭлѣa, пpeкȣm пътpatȣл tepminȣлȣĭ чeлȣĭ dintꙟĭ кътpe пътpatȣл чeлȣĭ de aл doĭлѣa.

Dȣпe ачѣasta, fiind къ se ape $a^2 : b^2 = a : c$ шi

$$a : b = c : d$$

ва fi шi $a^3 : b^3 = a : d$.

Saȣ̆ tepminȣл ꙟntꙟĭ se ape кътpe aл патpȣлѣa пpeкȣm кȣбȣл tepminȣлȣĭ ꙟntꙟĭ кътpe кȣбȣл чeлȣĭ de aл doĭлѣa.

Шi fiind къ ꙗpъш $a^3 : b^3 = a : d$ шi

$$a : b = d : e$$

ва fi шi $a^4 : b^4 = a : e$.

Saȣ̆ tepminȣл чeл dintꙟĭ se ape кътpe aл чinчeлѣa пpeкȣm пътpatȣл tepminȣлȣĭ ꙟntꙟĭ кътpe пътpatȣл чeлȣĭ de aл doĭлѣa.

Фie aкȣm ꙟn џeнepaл u tepminȣл aл $m^{\text{лea}}$ aл пpoгpesieĭ, шi se ва aвѣa $a : u = a^{m-1} : b^{m-1}$.

Dꙟndȣ-se dap ꙟntꙟiȣл шi aл doĭлѣa tepmin aл ȣneĭ пpoгpesiĭ, se ва пȣtѣa гъsi opĭ каpe tepmin чepȣt. Фiind s. п. $a = 3$, $b = 9$, шi чepꙟndȣ-se aл шaseлѣa tepmin aл ачeщiĭ пpoгpesiĭ, se ва aвѣa $3 : u = 3^5 : 9^5$ шi

$$u = \frac{9^5 \cdot 3}{3^5} = \frac{9^5}{3^4} = \frac{3^{10}}{3^4} = 3^6 = 729.$$

§. 472. Фie q esпoneнtȣл кomȣn saȣ̆ кꙟtȣл a fieкъpop doĭ tepminĭ каpe вin ꙟndatъ ȣnȣл dȣпe aлtȣл ꙟntp'o пpoгpesie џeometpiкъ. Ачest кꙟt se гъseщe, daкъ se ва ꙟmпъpцi opĭ каpe tepmin пpin чeл dinaintea лxĭ. Аша ва fi ↑n прогресіа $1:2:4:8:16\ldots$ к↑tхл $=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\ldots=2$. К↑tхл прогресіеĭ $27:9:3:1\ldots$ este $\frac{9}{27}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Dакъ dар ва fi a терminхл ↑nt↑ĭ ал прогресіеĭ, aq ва fi ал doĭлеа термin, aq^2 ал треĭлеа, aq^3 ал патрхлеа, шчл.; пентрх къ fie каре термin хрmътор se поате гъsi, к↑nd se ва ↑mmхлцi терminхл пречеdent пріn к↑tхл комхn. Dакъ вом sкрі dеasхпра fie-кърхіа термin аръtъторхл коръsпхnzъtор, fie-каре прогресіе цеометрікъ se ва пхtеа ↑nfъціша dхпе formхла хрmъtoаре:

аръtъторĭ	1	2	3	4	5	6	
терminĭ	a :	aq :	aq^2 :	aq^3 :	aq^4 :	aq^5	шчл.

Аша dар tot терminхл хnеĭ прогресіĭ este deопотрівъ кх терminхл ↑nt↑ĭ, ↑mmхлцit кх ачеа пхtере а к↑tхлхĭ, ал кърia esпоnent este кх о хnime maĭ mik dек↑t аръtъторхл терminхлхĭ черхt. Фie m ↑n цеnерал аръtъторхл хnхĭ термin черхt, шi x кіар ачел термin, аша вом авеа $x=aq^{m-1}$; sхв ачеаstъ formъ dар se поате ↑nfъціша орĭ-каре термin.

Фiind s. п. терminхл ↑nt↑ĭ 1, к↑tхл 2, шi чер↑ndх-se ал zечелеа термin ал ачещiĭ прогресiĭ, съ пхnem ↑ntр'ачеа formхлъ цеnералъ $a=1$, $q=2$ шi $m=10$, шi ва fi

$$x=1\,.\,2^9=512;$$

іар dакъ к↑tхл ва fi $\frac{1}{2}$, atхnчĭ ал zечелеа термin ва еші

$$x=1\,.\left(\tfrac{1}{2}\right)^9=\tfrac{1}{512}.$$

§. 473. Съ zічем къ ↑ntр'о прогресіе цеометрікъ s↑nt a, x, y, z терminĭ de о потрівъ dепъртаці хnхл de алтхл. Акхm fiind къ este $x=aq^{m-1}$, ва fi шi $y=xq^{m-1}$ шi $z=yq^{m-1}$. Аша dар терminiĭ a, x, y, z formеazъ шi еĭ о прогресіе цеометрікъ, ал кърхіа к↑t

este $=q^{m-1}$. Asfeл ɪn прогресia
1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 шчл. terminiĭ
1 : 4 : 16 : 64 : 256 алкътueск о прогресie, ал кърia кɪt
este 4; ɪap terminiĭ 1 : 8 : 64 : 512 алтъ прогресie ал
кърia кɪt este 8, шi челе-лалте.

§. 474. Ɪntpe doĭ нumepĭ daцĭ f шi g se поate
бъга орĭ кɪцĭ алцĭ terminĭ mijлочiĭ, каре тоцĭ ɪm-
преunъ кu terminiĭ daцĭ вор forma о прогресie џео-
metpiкъ. Фie h нumъpul terminiлор че sɪnt а se бъ-
га ɪntpe алцiĭ, аша se ва алкътui toatъ прогресia din
$h+2$ terminiĭ, шi $h+2$ ва fi аръtътоpul terminu-
луĭ челуĭ din урmъ g; прin урmаре $g=fq^{h+1}$ (§. 472),
de unde se гъсеще $q=\sqrt[h+1]{\frac{g}{f}}$. Dупе ачеаsta прin кɪ-
tul aflat шi прin ɪntɪiul termin кunoscut se пот фор-
ma тоцĭ чеĭ лалцĭ terminĭ. Дакъ spre пildъ s'ар че-
pe sъ se фаче ɪntpe f шi g numaĭ un termin mijлочiŭ
x, ва fi $h=1$, шi atuнчĭ вом авеа

$$q=\sqrt{\frac{g}{f}} \text{ шi } x=f\sqrt{\frac{g}{f}}=\sqrt{fg}.$$

De se вор чере doĭ terminĭ mijлочiĭ x шi y, ва fi
$h=2$ шi $q=\sqrt[3]{\frac{g}{f}}$; прin урmаре $x=f\sqrt[3]{\frac{g}{f}}=\sqrt[3]{f^2g}$,
шi $y=xq=\sqrt[3]{f^2g}\times\sqrt[3]{\frac{g}{f}}=\sqrt[3]{fg^2}$.

Пentpu tpeĭ terminĭ mijлочiĭ x, y, z, se ва гъsi
$q=\sqrt[4]{\frac{g}{f}}$, прin урmаре $x=fq=f\sqrt[4]{\frac{g}{f}}=\sqrt[4]{f^3g}$;
$y=xq=\sqrt[4]{f^3g}\times\sqrt[4]{\frac{g}{f}}=\sqrt[4]{(fg)^3}=\sqrt{fg}$;
$z=yq=\sqrt[4]{f^2g^2}\times\sqrt[4]{\frac{g}{f}}=\sqrt{fg^3}$.

§. 475. Sȣma ȣneй прогресiй ӂеометрiче se поат[е]
гъsi прin deoseвite кiпȣрi; Фie прогресia

$$a:b:c:d:e:\ldots u:x:y:z,$$

ȣnde z ꙟnsemnѣazъ терminȣл din ȣрmъ. Sȣma ачещiй
прогресiй fie s, аша вом авѣа:

$s = a + b + c + d + e + \ldots u + x + y + z$. Акȣm fiind къ se аре
$a:b = b:c = c:d = d:e = \ldots u:x = x:y = y:z$, se ва авѣа,
dȣпе §. 331, шi sȣma тȣтȣрор antечеdenцiлор кътре
sȣma тȣтȣрор консеквenцiлор, прекȣm fie каре ante-
чеdent se аре кътре консеквentȣл съȣ̆; аша dap ва fi:
$(a + b + c + \ldots u + x + y):(b + c + d \ldots + x + y + z) = a:b$.

Sȣma antечеdenцiлор ꙟnsъ копрinde тоцй терminiй
прогресieй afаръ de чел din ȣрmъ, шi аша ачѣа sȣmъ
este $= s - z$; sȣma консеквenцiлор копрinde тоцй
терminiй afаръ de чел din тɨй, шi аша este $= s - a$;
прin ȣрmаре

$(s - z):(s - a) = a:b = a:aq = 1:q$ шi

$sq - qz = s - a$ saȣ̆ $sq - s = qz - a$, de ȣnde $s = \dfrac{qz - a}{q - 1}$.

Ачѣаш formȣлъ se ва гъsi пentpȣ s шi прin
кiпȣл ȣрmътор:

Фie a терminȣл ꙟntɨй ал ȣneй прогресiй, q кɨтȣл,
шi n аръtъторȣл терminȣлȣй din ȣрmъ z; аша dap
$z = aq^{n-1}$, шi прогресia

$$a : aq : aq^2 : \ldots aq^{n-2} : aq^{n-1};$$ прin ȣрmаре

sȣma $s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$.

Ꙟmmȣлцindȣ-se ачѣastъ екȣ̆ацie кȣ q, шi sкъzɨn-
dȣ-se ѣa ꙟnsъш din продȣкt, se ва гъsi:

$$sq = \qquad aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n$$
$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Ръмъшіца ва fi $sq - s = aq^n - a$ saŭ $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$.

Dap $aq^n = q \times aq^{n-1} = qz$, аша dap ıаръш $s = \frac{qz - a}{q - 1}$.

Dакъ fpɪнцерea $\frac{a}{1 - q}$ se ва desвoлta пpin ɪмпъpцipe ɪн sepie, ва еші:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \frac{aq^n}{1-q}; \text{ de ѕnde}$$
$$\frac{a - aq^n}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = s.$$

Аша dap ші аічї авem

$$s = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{aq^n - a}{q - 1} \text{ (§. 154), saŭ}$$
$$s = \frac{qz - a}{q - 1} \text{ прекѕм maї sѕs.}$$

Екzemплe:

I. Sъ se гъseaskъ sѕma пpoгpesieї:

$$1 : c : c^2 : c^3 : c^4 : \ldots c^m.$$

Sъ пѕnem ɪн fopmѕлъ пentpѕ sѕmъ

$$a = 1 ; \; q = c ; \; z = c^m, \text{ ші ва fi}$$

$$1 + c + c^2 + c^3 + c^4 \ldots c^m = \frac{c^{m+1} - 1}{c - 1}; \text{ пpin ѕpmape}$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots 2^m = \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} = 2^{m+1} - 1$$
$$1 + 3 + 9 + 27 + \ldots 3^m = \frac{3^{m+1} - 1}{2};$$
$$1 + 4 + 16 + 64 + \ldots 4^m = \frac{4^{m+1} - 1}{3}$$

шчл. шчл.

II. Сѣ se afле сѕma прогрesieĭ:

$$1 : \frac{1}{c} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{c^3} : \frac{1}{c^4} : \ldots \frac{1}{c^m}.$$

Aiчĭ требѕе сѣ se пѕе ꙟn formѕла џенералѣ

$$a = 1 ;\ q = \frac{1}{c} \text{ ши } z = \frac{1}{c^m},$$

ши ва fi сѕma черѕтѣ:

$$s = \frac{\frac{1}{c^{m+1}} - 1}{\frac{1}{c} - 1} = \frac{1 - c^{m+1}}{(1-c)c^m}, \text{ саŭ (§. 154).}$$

$$s = \frac{c^{m+1} - 1}{(c-1)c^m} = \frac{c^{m+1}}{(c-1)c^m} - \frac{1}{(c-1)c^m} = \frac{c}{c-1} - \frac{1}{(c-1)c^m}.$$

Аша dap ва fi:

$$1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^3} + \ldots \frac{1}{c^n} = \frac{1}{c-1} - \frac{1}{(c-1)c^m}$$

саŭ dакѣ din amꙟndoѣ пѣрцiле ачещiĭ екѕацiĭ se ва скѣdea o ѕnime:

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^3} + \ldots + \frac{1}{c^m} = \frac{1}{c-1} - \frac{1}{(c-1)c^m}.$$

De se ва пѕne dap $c=2$, $c=3$, $c=4$ шчл. se ва гѣsi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \frac{1}{2^m} = 1 - \frac{1}{2^m};$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots \frac{1}{3^m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^m};$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots \frac{1}{4^m} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^m}$$

шчл. шчл.

Iap dакѣ aчeste fpꙟнцерĭ se вор ѕрma немѣрџinit, atѕнчĭ fiind кѣ este $m = \infty$ ва fi ши $\frac{1}{c^m} = 0$. Ла ачеаstъ ꙟntꙟmпларе dap ва fi:

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{c^4}+\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{c-1};$$ прin ꙋрmаре

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{2-1}=1;$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$$

шчл. шчл.

III. Se чере прецꙋл fрꙟнцерії dечімале періоdіче: 0,5151515 1 ...(§. 187 ші 200). Ші fiind къ este

$$0{,}5151515 1\ldots=51\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\ldots\right),$$

sъ пꙋnem ꙟn fорmꙋла de maї sꙋs $c=100$, ші ва fi

$$0{,}515151\ldots=51\cdot\frac{1}{100-1}=\frac{51}{99}=\frac{27}{33}.$$

§. 476. Ꙟn екꙋаціїле пеntрꙋ терmінꙋл din ꙋрmъ ші пеntрꙋ sꙋmа ꙋнеї прогресії џеоmетріче, аdекъ ꙟn

I) $z=aq^{n-1}$ ші

II) $s=\frac{qz-a}{q-1}$,

se копрind чінчї deoseбite кътimї nехотърꙟte, аdекъ a, q, n, z, ші s, din каре треї, аdекъ a, q, z se афлъ ꙟn аmꙟndoъ екꙋаціїле; аша dар прin лепъdарea sꙋксesівъ а ачеstор треї кътimї din аmꙟndoъ екꙋаціїле, se вор пꙋтea fорmа алте треї екꙋації, din каре чеа dintꙟї нꙋ ва копрinde нічї ꙋн a, а doъа нічї ꙋн q, а треїа нічї ꙋн z.

XLII.

Ка sъ se ледеde a, se ва пӳне ꙟn локӳл лӳĭ, ꙟn екӳаціа a doъa, прецӳл че se гъseщe din ꙟntꙟia екӳаціе, saӳ $a = \frac{z}{q^{n-1}}$, ші ва fi:

$$s(q-1) = qz - \frac{z}{q^{n-1}} = \frac{(q^n-1)z}{q^{n-1}},\ \text{saӳ}$$

$$\text{III}).\ s(q-1)q^{n-1} = (q^n-1)z.$$

Ка sъ se ледеde q, se ва пӳне ꙟn локӳл лӳĭ a ꙟn екӳаціа a doъa, прецӳл afлat din чеа dintꙟĭ, adeкъ $q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$ ші ва fi:

$$s\left(\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - 1\right) = z\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - a;$$

saӳ ꙟmmӳлціndӳ-se toatъ екӳаціа кӳ $\sqrt[n-1]{a}$:

$$\text{IV})\ s(\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}) = z\sqrt[n-1]{z} - a\sqrt[n-1]{a}.$$

Asemeнеа se поate ледъda ші z, пӳindӳ-se ꙟn локӳл лӳĭ, ꙟn a doъa екӳціе, прецӳл гъsit din чеа dintꙟĭ $z = aq^{n-1}$, ші ва fi:

$$\text{V})\ s(q-1) = a(q^n-1).$$

§. 477. Фіе каре din челе чінчĭ екӳаціĭ але параграfӳлӳĭ de maĭ nainte копрinde патрӳ кътimĭ nехотъртꙟte ші neatꙟрnate ӳna de алta; аша dар se поate еsпрima прецӳл fie кърia din еле прin челе лалте треĭ, ші astfeл din екӳаціiле de maĭ sӳs es доъzечĭ алте екӳаціĭ saӳ формӳле, прin каре, daкъ din челе чінчĭ кътimĭ a, q, n, z ші s треĭ вор fi кӳпоskӳte, se вор пӳтеа хотърꙟ ші челе лалте доъ.

Desволтареа ачестор формӳле este прекӳm ӳрмеазъ:
Din екӳаціа 1) еаsъ:

$$1)\ a = \frac{z}{q^{n-1}}.$$

2) $q=\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$.

3) $n=\frac{log.z-log.a}{log.q}$.

4) $z=aq^{n-1}$.

Формȣла а tреіа se алкътȣеще întр'ачest кiп: fiind $z=aq^{n-1}$, съ se пȣе логарitmiї ші ва fi:

$log.z=log.a+(n-1)log.q$; de ȣnde $n-1=\frac{log.z-log.a}{log.q}$.

Мȣtândȣ-se акȣm ȣnimea în партеа а doъа а екȣацieї, ва еші прецȣл лȣї n.

Din екȣацia II) наштъ:

5) $a=s-(s-z)q$.

6) $q=\frac{s-a}{s-z}$.

7) $z=s-\frac{s-a}{q}$.

8) $s=\frac{qz-a}{q-1}$.

Din екȣацia III) наштъ:

9) $q^n-\frac{s}{s-z}q^{n-1}+\frac{z}{s-z}=0$

10) $n=\frac{log.z-log.[s-(s-z)q]}{log.q}+1$.

11) $z=\frac{s(q-1)q^{n-1}}{q^n-1}$.

12) $s=\frac{(q^n-1)z}{(q-1)q^{n-1}}$.

Формȣла а ноъа este o екȣацie de градȣл ал ноъ-леа, de ачеа прецȣл q нȣ se поate хotърî în ӂенерал dintр'ачеastъ екȣацie. А зечеа formȣлъ se поate гъsi, ꙟmmȣлцindȣ-se кȣ q екȣаціа III, de ȣnde ва еші $q^n = \frac{qz}{s-(s-z)q}$ ші

$n \log.q = \log.q + \log.z - \log.[s-(s-z)q]$, каре екȣаціе ꙟn sfꙟршit ꙟmпърцindȣ-se кȣ $\log.q$, ва da формȣла de maĭ sȣs.

Din екȣаціа IV) ꙗsъ:

13) $(s-a)^{n-1}.a = (s-z)^{n-1}.z.$

14) $n = \frac{\log.z - \log.a}{\log.(s-a) - \log.(s-z)} + 1.$

15) $(s-z)^{n-1}.z = (s-a)^{n-1}.a.$

16) $s = \frac{z\sqrt[n-1]{z} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}.$

Dакъ ꙟn екȣаціа IV se вор mȣтa a ші z ꙟn пърціле ꙟmпotiвitoape, asfeл ка fie каре dintp'ачeste кътimĭ sъ se afле нȣmaĭ ꙟntp'o napte a екȣаціеĭ, вom aвea:

$$(s-z)\sqrt[n-1]{z} = (s-a)\sqrt[n-1]{a},$$

ші ачeastъ екȣаціе pꙟdiкꙟndȣ-se ла пȣтepea $n-1$, ва da формȣлеле de maĭ sȣs № 13 ші 15. Iap формȣла 14 se doвꙟndeщe, ꙟmпърцind екȣаціа IV кȣ $\sqrt[n-1]{a}$, de ȣnde ва еші $\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{s-a}{s-z}$ saȣ

$\left(\frac{s-a}{s-z}\right)^{n-1} = \frac{z}{a}$; npin ȣpmape ва fi ші

$(n-1)[\log.(s-a) - \log.(s-z)] = \log.z - \log.a$, каре екȣаціе ва da dȣпе ачеа формȣла пentpȣ n dела № 14.

Din екȣаціа V ꙗsъ:

17) $a = \frac{s(q-1)}{q^{n-1}}.$

18) $q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0.$

19) $n = \frac{\log.\left(s - \frac{s-a}{q}\right) - \log.a}{\log.q} + 1.$

20) $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$

Ȋn ȣрmътoapea tabлъ se apatъ fopmȣлa npin кape, кînd вop fi кȣnoskȣte tpeĭ din челе чinчĭ кътimĭ a, q, n, z шi s. Se пot гъsi челелалте doъ.

Кътimĭ date	Кътimĭ чepȣte	Фopmȣле
a, q, n	z s	4 20
a, q, z	n s	3 8
a, q, s	n z	19 7
a, n, z	q s	2 16
a, n, s	q z	18 15
a, z, s	q n	6 14
q, n, z	a s	1 12
q, n, s	a z	17 11
q, z, s	a n	5 10
n, z, s	a q	13 9

Ънtp'ачеаstъ taбaлъ iаръш a ънsemneazъ tepminѕл ънtъi, q кътѕл, n пѕmъpѕл tepminiлop, z tepminѕл din ѕpmъ ші s sѕma пporpesiei џeometpiче.

Oape кapе пpoблeme, a къpopa desлeгаpе dѕче лa пporpesii џeometpiче.

§. 478. Ѕn кaпitaл C s'a пѕs лa doбъndъ кѕ kondiџie, кa ън toџi anii doбъnda sъ se adaoџe лa кaпitaл; se чеpе aкѕm a se щi кът вa fi кaпitaлѕл dѕпе ѕn пѕmъp xotъpът de ani.

Sъ ziчеm къ n ънsemneazъ doбъnda лa sѕtъ пе an. Aкѕm fiind къ este $100 : C = n : \frac{nC}{100}$, вa fi doбъnda кaпitaлѕлѕi C пе fie кapе an $= \frac{nC}{100}$, ші stapea кaпitaлѕлѕi лa sfъpшitѕл anѕлѕi dintъi se вa гъsi $= C + \frac{nC}{100} = \left(1 + \frac{n}{100}\right) C = qC$, daкъ se вa пѕне $q = 1 + \frac{n}{100}$.

Sъ пѕnem ънкъ $C' = qC$, ші fiind къ iаръш este $100 : C' = n : \frac{nC'}{100}$, вa fi doбъnda кaпitaлѕлѕi C' лa sfъpшitѕл anѕлѕi aл doiлеa $= \frac{nC'}{100}$, ші stapea кaпitaлѕлѕi лa aчеeaш вpеme se вa гъsi $= C' + \frac{nC'}{100} = \left(1 + \frac{n}{100}\right) C' = qC'$.

Daкъ aкѕm se вa ънsemna stapea кaпitaлѕлѕi лa sfъpшitѕл anѕлѕi aл doiлеa, aл tpeiлеa, aл пatpѕлеa... кѕ C'', C''', C'''', шчл. вa fi, пpeкѕm mai sѕs, $C'' = qC'$;

$C'''=qC''$; $C''''=qC'''$, ші пꙋindꙋ-se ꙟn локꙋл лꙋї C', C', C'', C'''', прецꙋріле лор, se ва гъsi:

$$C' = qC;$$
$$C'' = qC' = q^2C;$$
$$C''' = qC'' = q^3C;$$
$$C'''' = qC''' = q^4C \text{ шчл.}$$

Капіталꙋл креще dар din an ꙟn an ꙟn прогресіе џеометрікъ, ал кърia кꙟt este q; ші dакъ Q ва ꙟnsemna старѣа капіталꙋлꙋї ла sfꙟршітꙋл анꙋлꙋї ал $m^{\text{леа}}$, ва fi $Q=q^mC$ (§. 472 saꙋ̆ §. 477 формꙋла 4). Фіе s. п. $C=3780$ леї, $n=5$, $m=10$, аша ва fi $Q=3780\times(1{,}05)^{10}$, ші прін логарітмї se ва гъsi:

$$\begin{aligned} log.\,3780 &= 3{,}5774918 \\ +\,10\,log.\,1{,}05 &= \underline{0{,}2118930} \\ &\ 3{,}7893848 = log.\,Q; \end{aligned}$$

Аша dар $Q=6157{,}22\ldots$ леї.

§. 479. Dакъ se ва чере времѣа, ꙟn каре капіталꙋл C пꙋs ла dобꙟndъ кꙋ ачеѣаш kondiціе, ка маї sꙋs, креще ла о кътіме хотъркtъ Q; атꙋнчї din екꙋаціа $Q=q^mC$ saꙋ̆ $q^m=\dfrac{Q}{C}$ se ва afла прецꙋл черкt

$$m=\frac{log.\,Q-log.\,C}{log.\,q};\ \text{s. п.}$$

Ꙟn кꙟці anї ꙋn капітал se поate face de треї орї маї маре?

Аічї dар требꙋе съ fie $Q=3C$ ші $\dfrac{Q}{C}=3$, прін ꙋрмаре $log.\,Q-log.\,C=log\ 3$ ші $m=\dfrac{log.\,3}{log.\,q}$, ші dакъ este іаръш $q=1{,}05$, ва fi

$$m=\frac{log\ 3}{log.\ 1,05}=\frac{0,4771213}{0,0211893}=22,517\ldots$$

Аша dap fie каре капітал кȣ камъtъ 5 ла sȣtъ se ва ꙟntpei dȣпе 22 $\frac{1}{2}$ anĭ. Пȣindȣ-se ꙟn џенерал $Q=fC$, ва fi $m=\frac{log.f}{log.q}$.

§. 480. Дакъ ȣn капітал C ꙟn m anĭ s'a fъкȣt Q, кȣ кꙟt ла sȣtъ a fost пȣsъ камъta?

Din екȣаціа $Q=q^mC$ se ва гъsi:

$$q=\sqrt[m]{\frac{Q}{C}},\ \text{saȣ}\ 1+\frac{n}{100}=\sqrt[m]{\frac{Q}{C}}\ \text{ші}$$

$$n=100\left(\sqrt[m]{\frac{Q}{C}}-1\right);\ \text{s. п.}$$

Ȣn къmъtap 'ша ꙟmпъtpit капіталȣл ꙟn 12 anĭ, кꙟtъ камъtъ dap a лȣat ел ла sȣtъ?

Aiчĭ este $\frac{Q}{C}=4$, аша $n=100(\sqrt[12]{4}-1)$. Dap $\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}=\sqrt[3]{(\sqrt{2})}=1,12246\ldots$; пріn ȣpmape

$$n=0,12246\ldots\times 100=12,246\ldots$$

Аша dap ел a лȣat камъtъ maĭ mȣлt de 12 ла sȣtъ.

Прецȣл къtimeĭ padiкале $\sqrt[m]{\frac{Q}{C}}$ se поate гъsi maĭ лesne ші maĭ пе sкȣpt пріn логаpitmĭ; adeкъ:

$$log.\sqrt[m]{\frac{Q}{C}}=\frac{log.Q-log.C}{m}.$$

§. 481. Оаре чіне аре sъ плъtеаskъ пеste 9 anĭ 7800 леĭ; dap ел воеще sъ ръsпȣnzъ акȣm ꙟndatъ ачеаstъ datopie, кꙟt bine sъ dea пеntpȣ ачеаsta.

Sȣma че se чepe tpeбȣe sъ fie atꙟta de mape, кꙟt ꙟmпpeȣnъ кȣ doбꙟnda eĭ пе поъ anĭ sъ ꙟmплineaskъ sѹma de maĭ sѹs 7800 леĭ. Аша dар съ se пѹе ꙟn екѹ̆ація $Q=q^mC$ кътimea $Q=7800$; $m=9$; $q=1,05$, ші ва fi:

$$C=\frac{Q}{q^m}=\frac{7800}{(1,05)^9}, \text{ de ѹnde}$$

$$\begin{aligned} log.\,7800 &= 3,8920946 \\ -9\,log.\,(1,05) &= \underline{0,1907037} \\ & 3,7013909 = log.\,C; \end{aligned}$$

пріn ѹрmаре $C=5027,95$ леĭ; аша dар atꙟt треБѹе съ se ръспѹnzъ акѹm пentрѹ datоріа de 7800 леĭ че ера съ se плъtеaskъ пeste 9 anĭ.

§. 482. Ла ѹn капitал C пе лꙟнгъ doБꙟndъ se adaoгъ ꙟn fie каре an ші кꙟte о sѹmъ хотърꙟtъ A; se чере акѹm a se afла stаpеа капiталѹлѹĭ dѹпе оаре каре пѹmър de anĭ.

Фіе аічĭ ꙗръш stаpеа капiталѹлѹĭ ла sfꙟршitѹл anѹлѹĭ dintꙟĭ, anѹлѹĭ ал doĭлеа, ал treĭлеа... C', C'', C''' шчл. ші вom авеа, прекѹm ла §. 478,

$$C'=qC+A;$$
$$C''=qC'+A=q^2C+qA+A;$$
$$C'''=qC''+A=q^3C+q^2A+qA+A;$$
$$C''''=qC'''+A=q^4C+q^3A+q^2A+qA+A\ldots$$

шчл.

Dакъ dар Q se ва лѹа dрeпt stаpеа капiталѹĭ C пeste m anĭ, ва fi:

$$Q=q^mC+q^{m-1}A+q^{m-2}A+\ldots q^2A+qA+A \text{ saѹ̆}$$

$$Q=q^mC+A\,(1+q+q^2+\ldots q^{m-2}+q^{m-1}). \text{ Dар}$$

$$1+q+q^2+q^3\ldots+q^{m-1}=\frac{q^m-1}{q-1} \text{ (§. 475) аша dар este ші}$$

$$Q=q^mC+\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)A.$$

XLIII.

§. 483. Dакъ ꙟn formꙋла параграфꙋлꙋĭ de маĭ sꙋs вom faче съ fie $A=0$, ва fi $Q=q^m C$, каре este ачеѣаш ꙟntꙟмпларе, прекꙋm ла §. 478. Iар dакъ din капitалꙋл пꙋs ла добꙟndъ se ва лꙋа пе fieш каре an кꙟte о sꙋmъ de банĭ $=A$, atꙋnчĭ stареа капitалꙋлꙋĭ C dꙋпе m anĭ ва fi $Q=q^m C-\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)A$.

Аша dар de ва fi съ se тъpѣаskъ ла ачеаstъ ꙟntꙟмпларе stареа капitалꙋлꙋĭ, saꙋ съ se facъ $Q>C$, требꙋе съ fie:

$$q^m C-\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)A>C, \text{ saꙋ}$$

$$(q^m-1)\,C>\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)A \text{ ши}$$

$$C>\frac{A}{q-1}, \text{ saꙋ ши } (q-1)\,C>A. \text{ Dар}$$

$q-1=\frac{n}{100}$; прin ꙋрmаре требꙋе съ fie $\frac{nC}{100}>A$, adекъ sꙋmа A че ва fi съ se ꙗ din капitал пе fie каре an требꙋе съ fie maĭ micъ, декꙟt добꙟnda dintр' ꙋn an a капitалꙋлꙋĭ C.

De ва fi $A=\frac{nC}{100}$, ва ръmꙟnѣа капitалꙋл C tot ачела; ꙗр dакъ ва fi $A>\frac{nC}{100}$, atꙋnчĭ капitалꙋл чел dintꙟĭ C требꙋе съ skazъ din an ꙟn an maĭ mꙋлt. Времеа, ꙟn каре tot капitалꙋл se ва afла келтꙋit, se ва гъsi din екꙋацiа $Q=0$, saꙋ $q^m C=\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)A=0$. Dintр'ачеаstъ dар екꙋацiе ꙋрmеазъ:

$$(q-1)\,q^m C-q^m A+A=0$$

$$q^m[A-(q-1)C]=A,\ q^m=\frac{A}{A-(q-1)C}.$$

Прin логаритmї ачеastъ екѣаціе dъ:

$$m\,log.q=log.A-log.[A-(q-1)C],\ \text{ші}$$

$$m=\frac{log.A-log.[A-(q-1)C]}{log.q}.$$

S. п. Фie $C=80000$ леї; $q=1,05$; аша добѫн-da пе fie каре an ва fi $(q-1)C=4000$ леї.

Dакъ акѣm se ва лѫа $A=9000$, прin ѣрmаре $A-(q-1)C=5000$, ва fi:

$$m=\frac{log.9000-log.5000}{log.1,05}.$$

$$\begin{array}{rl} log.9000= & 3,9542425 \\ -log.5000= & \underline{3,6989700} \\ & 0,2552725,\ \text{de ѣnde} \end{array}$$

$$m=\frac{0.2552725}{0,0211893}=12,047\ldots$$

Аша dар din капitалѣл de 80000 леї, кѣ kondi-ціiле date, н'ар mаї ръmѫnea nimiк dѣпе 12 anї.

§. 484. Оаре чine sкоate dintр'о бѫtie ѣmплѫтъ кѣ вin ші кѣ апъ о кътime $=a$, ші ла fie каре datъ ѫmплineще лinsa ла лок кѣ апъ. Кѫt вin кѣрat se ва maї afла ѫn бѫtie dѣпе ѣn нѣmър de asemenea ѫmплi-nipї $=m$?

Фie A капачitatea бѣціi, ші V кътimea вinѣлѣї че se ва afла ла чеа dintѫї amestекаре. Акѣm fiind къ amestекърiле se fак пеste tot ѫntр'ачелаш кip, se вор авеа ѫntpe еле кътimеле вinѣлѣї копрins ѫn A ші a пре-кѣm ѫnsѣшї капачitъціле, прin ѣрmаре $A\cdot a=V:\frac{aV}{A}$; ва fi dар кътimea вinѣлѣї копрins ѫn бѫtie dѣпе чеа dintъĭ sкoatepe шi ↑mпʌinipe кꙋ апъ =

$V-\frac{aV}{A}=\left(1-\frac{a}{A}\right)V$. Sъ se ↑nsemneze ачѣastъ кътime кꙋ V', шi ꙗаръш se ва пꙋtѣа аръta, къ dꙋпе a doъa sкoatepe din бꙋtie шi ↑mпʌinipe ʌa ʌoк кътimѣа вinꙋʌꙋĭ ръmas este $=V'-\frac{aV'}{A}=\left(1-\frac{a}{A}\right)V'$.

Dакъ dap аческe кътimĭ de вinꙋʌ ръmas ↑n бꙋtie, dꙋпе a doъa, a tpeꙗа . . . sкoatepe шi ↑mпʌinipe ʌa ʌoк, se ва ↑nsemna пpin V'', V''', V'''' шчʌ. ва fi, пpeкꙋm maĭ sꙋs,

$$V''=\left(1-\frac{a}{A}\right)V';$$

$$V'''=\left(1-\frac{a}{A}\right)V'';$$

$$V''''=\left(1-\frac{a}{A}\right)V'''$$

шчʌ.

Шi пꙋind ↑n ʌoкꙋʌ ʌꙋĭ V', V'', V''', V'''' пpeцꙋpiʌe ʌop, вom авѣа:

$$V'=\left(1-\frac{a}{A}\right)V;$$

$$V''=\left(1-\frac{a}{A}\right)^2V;$$

$$V'''=\left(1-\frac{a}{A}\right)^3V;$$

$$V''''=\left(1-\frac{a}{A}\right)^4V;$$

шчʌ.

Dакъ toatъ бꙋtia ʌa ↑нчепꙋt ва fi fost пʌinъ кꙋ вin кꙋpat, atꙋнчĭ ↑n fopmꙋʌeʌe de maĭ sꙋs tpeбꙋe sъ se пȣе $V = A$. Акȣm fiind $a < A$, ші прin ȣрmape $\frac{a}{A} < 1$, ва fi кѫtȣл $1 - \frac{a}{A}$ o fрѫнцере кȣpatъ, ші прецȣл eĭ se ва mікшора кȣ atѫt, кȣ кѫt ва креще esпоnentȣл m, нічĭ odatъ ѫnsъ m нȣ se ва пȣtea faче $= 0$. Аша dap ла amestекаре ва ръmѫnea tot deaȣna ѫn бȣtie чева вin, mъкар de s'ap skoate dintp'ѫnsa ші s'ap ȣmплea ла лок кȣ апъ de nemъpцinite opĭ. Кȣ toate aчestea кътimea вinȣлȣĭ se ва ѫmпȣцina кȣ atѫt maĭ кȣрѫnd, кȣ кѫt maĭ mік ва fi кѫtȣл $1 - \frac{a}{A}$ saŭ кȣ кѫt maĭ пȣцinъ ва fi deoseбipea ѫntpe a ші A.

Прецꙋл este
6 sfanцixĭ.